Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Carla Alexandra Gomes de Oliveira Almeida

Provas Pictóricas de Identidades Algébricas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Carla Alexandra Gomes de Oliveira Almeida

Provas Pictóricas de Identidades Algébricas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Rute Correia Lemos, professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutora Maria Paula Oliveira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Lígia Raquel Lopes dos Santos Abrunheiro
Professora Adjunta do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Rute Correia Lemos
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Expresso o meu sincero obrigada:

· à minha orientadora pela sua disponibilidade e apoio na prossecução deste trabalho;
· à minha família pela compreensão e ternura sempre manifestadas;
· a todos aqueles que contribuiram para a realização deste meu trabalho, nomeadamente os meus alunos

palavras-chave

Ensino da Matemática, provas pictóricas, identidades algébricas, geometria, provas sem palavras, visualização.

resumo

Esta dissertação pretende ser uma reflexão sobre a importância das provas sem palavras no ensino da Matemática do segundo e terceiro ciclos do ensino básico e a sua implementação em contexto de sala de aula como estratégia de ensino conducente a uma participação mais ativa dos alunos na construção dos conceitos matemáticos e melhor compreensão dos mesmos.

Alguns matemáticos e investigadores em Educação Matemática defendem as potencialidades pedagógicas da visualização no Ensino da Matemática. Reúne-se nesta dissertação um conjunto de provas pictóricas de identidades algébricas adaptadas aos conteúdos lecionados no segundo e terceiro ciclos do ensino básico da disciplina de Matemática segundo o Programa de Matemática homologado a 17 de junho de 2013, em vigor à data em Portugal. De cada prova apresentada consta o ano escolar a que se destina, o domínio dos conteúdos, os pré-requisitos a verificar pelo professor antes de iniciar cada tarefa, as aprendizagens visadas, assim como uma atividade planeada para conduzir os alunos que não estabelecem as conexões entre as imagens e a respetiva identidade algébrica. O estímulo visual destas provas pictóricas pretende fomentar no aluno vontade de descobrir a natureza dos processos de fazer matemática.

keywords

Teaching of mathematics, pictorial proofs, algebraic identities, geometry, proofs without words, visualization.

abstract

This dissertation aims to be a reflection on the importance of proofs without words in the teaching of mathematics during the second and third cycles of basic education and its implementation in the context of the classroom as a teaching strategy that leads to a more active participation of the students in the construction of mathematical concepts and a better understanding of them.

Some mathematicians and researchers in mathematics education advocate the potential of visualization on the teaching of this subject. This dissertation includes a set of proofs without words of algebraic identities adapted to the contents that are taught throughout the second and third cycles in Portugal according to the maths syllabus approved on 17th June, 2013, still effective at this time. Every proof presented contains not only the school year to which it is addressed, but also the contents and the prerequisites to be checked by the teacher before being held in the classroom. They also include the learning goals, as well as a planned activity for those students who do not make the connections between the images and the respective algebraic identity in order to guide them towards the observation ant interpretation of the images. The visual stimulus of the proofs without words intends to promote in the student the will to discover the nature of the processes of making mathematics.

Índice

Índice de ilustrações

Índice de atividades

Introdução

"Uma imagem vale mais do que mil palavras."
(Ditado popular)

São muitas as dificuldades registadas pelos alunos ao lidar com alguns conteúdos matemáticos. Será a Matemática muito complexa ou serão os métodos usados muitas vezes pouco compatíveis com as perceções dos alunos? Esta é uma das questões que o professor coloca perante os resultados obtidos na sua prática de ensino da disciplina.

O professor articula a prática de ensino de acordo com a diversidade das turmas que leciona, utilizando variadas ferramentas metodológicas a fim de concretizar essa mesma aprendizagem, contudo nem sempre os resultados obtidos são os expectados.

A Matemática é uma disciplina com uma elevada taxa de insucesso escolar e rejeitada por muitos alunos que frequentam o ensino básico e secundário. Motivar os alunos e torná-los sujeitos ativos na construção do próprio conhecimento são desafios constantes para o professor. Para isso, há que procurar implementar práticas de sala de aula que fomentem atitudes mais positivas e enfatizem a experimentação, a pesquisa e a descoberta, em vez da rotina e da memorização.

A visualização de imagens e diagramas é cada vez mais uma ferramenta essencial na aprendizagem da Matemática.

Nos primórdios da nossa civilização, quando não existia linguagem adequada para descrever ideias matemáticas, as provas sem palavras eram as provas, apesar de não serem demonstrações rigorosas. Desenhos matemáticos relacionados com as demonstrações foram produzidos desde a antiguidade na China, Arábia, Grécia e Índia, mas assumiram maior importância nas últimas quatro décadas (ver ilustração 3).

George Pólya (1887–1985), matemático húngaro, autor do famoso livro "*How to Solve It*" publicado em 1945, onde desenvolveu um método para a resolução de problemas, aconselhava pedagogicamente "*draw a figure*"[1].

Henri Poincaré (1854–1912), matemático, físico e filósofo de ciência francês, escreveu sobre criação matemática e intuição (Poincaré, 1988):

> Ciência alguma pode nascer apenas da lógica (...) para produzir Aritmética tal como para produzir Geometria ou qualquer outra ciência, é necessário algo mais que a lógica pura. Para designar essa outra coisa, não temos outra palavra senão intuição (...) a ciência da demonstração não é toda a ciência e a intuição deve conservar o seu papel como complemento, diria mesmo, como contrapeso ou antídoto da lógica (...) Tive já oportunidade de insistir no que diz respeito ao lugar que a intuição deve ter no ensino das ciências matemáticas. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de aceder ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Sem a intuição, sobretudo, nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática (...) Assim, a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis. A lógica que é a única que nos pode fornecer a certeza é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção.

Nesta dissertação, apresentam-se vários exemplos de imagens que podem ser implementadas em contexto de sala de aula, como ferramenta metodológica para estimular a curiosidade e compreensão de determinadas identidades algébricas ao longo do segundo e terceiro ciclos do ensino básico, melhorando assim a comunicação matemática e contribuindo para a construção de alguns conceitos matemáticos e uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática. Estas provas pictóricas podem constituir um ponto de partida, em especial para os mais jovens, para que estes possam trabalhar de forma intuitiva, estabelecer conexões entre as imagens e as respetivas identidades algébricas, relacionar conceitos geométricos e algébricos. Estas imagens pretendem desenvolver o raciocínio matemático do aluno através de estímulos visuais e

---

[1] "desenha uma figura"

fomentar uma atitude mais positiva e ativa face a esta disciplina, convertendo a sala de aula num espaço onde os alunos desenvolvem a capacidade de observar, conjeturar, argumentar, demonstrar e aprender Matemática.

Organiza-se um conjunto de provas sem palavras conhecidas que consideramos adaptadas ao grau de ensino e faixa etária dos alunos. As provas estão enquadradas no ano de escolaridade segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado a 17 de junho de 2013 e em vigor à data do trabalho. Para além do ano de escolaridade, em cada prova indicam-se o domínio, os pré-requisitos a verificar antes de iniciar cada prova e as respetivas aprendizagens visadas. Para os alunos que apresentam dificuldades na visualização, de modo a que possam ir melhorando as suas capacidades de observação e análise, apresentam-se propostas de atividades orientadas.

O trabalho está dividido em três capítulos. Do primeiro capítulo consta o enquadramento histórico das provas sem palavras, a definição de prova matemática segundo alguns matemáticos, a importância da visualização na apreensão de conhecimentos matemáticos e a contextualização das provas que são apresentadas. O segundo e terceiro capítulos referem-se às provas pictóricas de identidades algébricas de conteúdos lecionados no segundo e terceiro ciclos do ensino básico. Do segundo capítulo fazem parte as provas de identidades de natureza algébrica e, do terceiro capítulo, as de natureza geométrica.

Existem muitas outra provas sem palavras relativas a conteúdos lecionados no ensino secundário ou superior. Contudo, nesta dissertação, o propósito foi trabalhar os conteúdos respeitantes aos níveis escolares que habitualmente leciono, com vista a aperfeiçoar a minha prática de ensino como professora de Matemática.

A principal motivação para o desenvolvimento do trabalho surgiu da preocupação como professora com o uso mecânico de fórmulas e algoritmos no Ensino da Matemática, surgindo dessa forma vontade em pesquisar outros processos que favoreçam uma melhor e mais profunda compreensão dos conceitos matemáticos, assim como uma maior participação dos alunos.

1. Provas sem palavras

1.1. Breve história das provas sem palavras

As provas sem palavras surgiram inicialmente na Grécia antiga e na China e, mais tarde, no décimo século Árabe e na Itália renascentista.

Os matemáticos antigos expressaram ideias matemáticas através de imagens. A prova do Teorema de Pitágoras é uma evidência de como os matemáticos antigos encontraram relações matemáticas e as expressaram através de desenhos. Um exemplo importante é a prova pictórica do Teorema de Pitágoras de um texto chinês sobre Astronomia e Matemática chamado "*Zhou Bi Suan Jing*" datado de cerca de 100 a.C. (Swetz, et al., 2011).

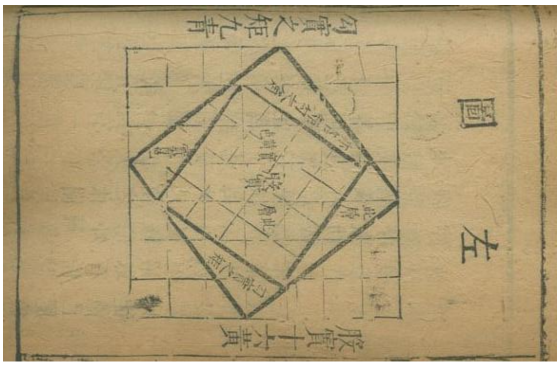


Ilustração 1: Imagem de uma cópia impressa em 1603 do texto Zhou Bi Suan Jing

Variações desta prova geométrica foram creditadas ao próprio Pitágoras (600 a.C.) e ao matemático hindu Bhaskara (século XII). Mesmo Euclides (300 a.C.) incluiu uma prova famosa no seu livro "Os Elementos" que se apresenta na ilustração 2 (Kilhian, 2011):

Ilustração 2: “Os Elementos”, Proposição 47 do Livro I, demonstração do Teorema de Pitágoras

Matemáticos e outros curiosos apresentaram demonstrações do Teorema de Pitágoras, entre eles, alguns conhecidos, como Leonardo da Vinci (1452–1519), George Pólya e o vigésimo presidente dos Estados Unidos, James A. Garfield (1831–1881), tendo a sua demonstração sido publicada em 1876 no *New England Journal of Education*.

Apresentam-se ilustrações de algumas provas visuais do Teorema de Pitágoras de várias civilizações (Santos, 2011):

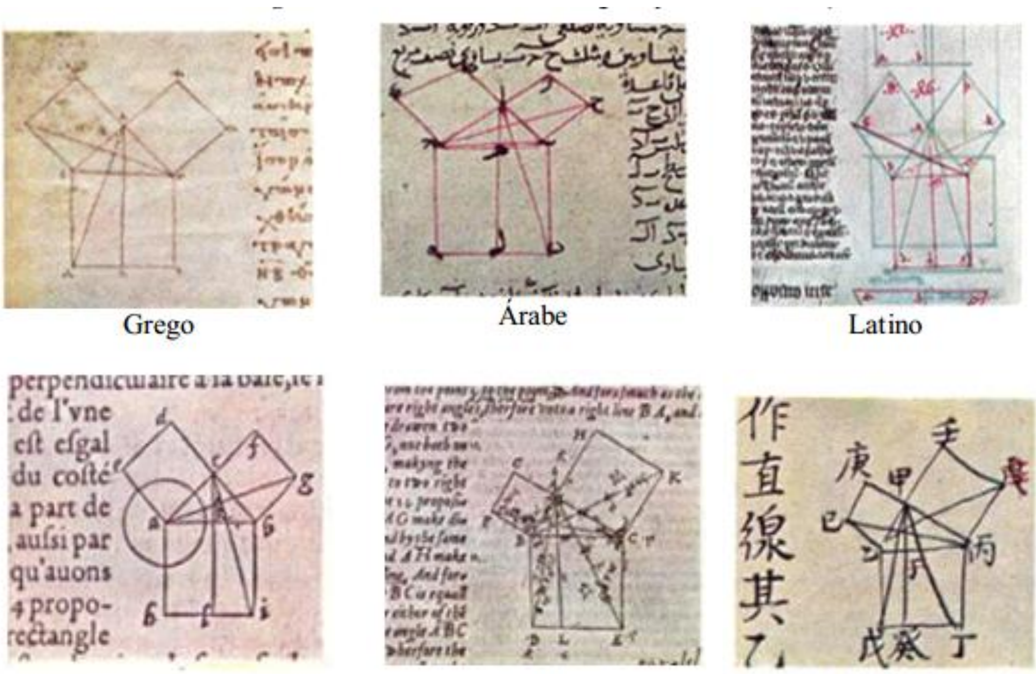


Ilustração 3: Provas visuais do Teorema de Pitágoras de várias civilizações

As provas visuais têm as suas raízes na antiguidade, sendo ainda utilizadas por matemáticos contemporâneos.

As provas sem palavras tornaram-se temas regulares de dois periódicos publicados pela Associação Americana de Matemática. Começaram a aparecer na *Mathematics Magazine,* por volta de 1975, e no *College Mathematics Journal* cerca de dez anos mais tarde.

Em setembro de 1975, Rufus Issacs (Issacs, 1975) publicou um artigo intitulado "*Two Mathematical Papers without Words*" na *Mathematics Magazine*. Um desses trabalhos era uma prova do Teorema de Pitágoras e o outro a trissecção de um ângulo. Nenhum desses trabalhos foi designado como prova, tinham apenas a intenção de transmitir uma ideia matemática de uma forma puramente visual.

Em janeiro de 1976, a mudança na liderança editorial na *Mathematics Magazine*, sob a nova direção de J. Arthur Seebach e Lynn Arthur Steen, ditou uma alteração no formato com uma nova secção a substituir as antigas "Notas e Comentários" e a incluir a opinião do leitor, permitindo comentários acerca dos artigos publicados e a sua impressão poucos meses depois da publicação. Vários leitores enviaram comentários sobre os artigos publicados em setembro 1975, sendo que a maioria das observações apresentadas foram em relação aos dois trabalhos matemáticos sem palavras de Isaacs. Os coeditores deixaram uma nota a encorajar contribuições adicionais de provas sem palavras para poderem posteriormente publicar. Após este pedido, começaram a surgir uma ou duas publicações por ano. Em 1987, essa taxa subiu em média para cinco ou seis por ano, e cerca de duas por edição. Os matemáticos começaram a tomar conhecimento destes desafios matemáticos e Roger Nelsen, professor do Departamento de Ciências Matemáticas de *Lewis and Clark College*, em Portland, Oregon, não foi exceção. Em junho de 1987, ele publicou as suas primeiras provas sem palavras. Depois de ter organizado o suficiente para fazer uma coleção, publicou o primeiro livro intitulado *"Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking"* (Nelsen, 1993), seguido de *"Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking"* (Nelsen, 2000). Posteriormente, em coautoria com Claudi Alsina, professor catedrático de matemática da Universidade Politécnica da Catalunha e investigador na área de inovação educativa, publicaram as obras "*Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*" (Alsina, et al., 2006), "*When Less is More: Visualizing Basic Inequalities*" (Alsina, et al., 2009) e "*Charming Proofs: A Jorney Into Elegant Mathematics*" (Alsina, et al., 2010b) .

Para Claudi Alsina e Roger Nelsen (Alsina, et al., 2010a), "as provas sem palavras são imagens ou diagramas que ajudam o leitor a perceber porque uma determinada afirmação matemática pode ser verdade e também a ver como se pode começar a provar a sua veracidade".

Hoje em dia, muitas provas sem palavras de teoremas estão documentadas em publicações e as mais famosas estão nos livros de Roger Nelsen e Claudi Alsina. Existem também várias aplicações dinâmicas de provas sem palavras disponíveis na internet.

1.2. Algumas definições de prova matemática

Robin Miller (Miller, 2012) em "*On Proofs Without Words*" refere alguns exemplos de definições formais de prova em Matemática:

1) "A demonstração de um teorema feita a partir de axiomas e teoremas já conhecidos é conhecida como uma prova." (Goodfriend, 2005)
2) "A prova é uma sequência de afirmações. Estas afirmações surgem de duas formas: dadas e deduzidas." (Keef, et al., 2010)
3) "Provar uma afirmação é proceder logicamente a partir de premissas e chegar a conclusões." (Lucas, 1990)
4) "A prova é uma série de demonstrações em que a validade de cada uma é baseada num axioma ou num teorema anteriormente provado." (Morash, 1991)
5) "A prova é uma sequência de passos lógicos irrefutáveis que têm origem em axiomas e demonstrações previamente provadas" (Wolf, 1998).
6) "A prova é a demonstração da validade de alguma afirmação matemática precisa. A demonstração deve conter detalhes suficientes para convencer o público-alvo de sua validade." (Gossett, 2009)
7) "Uma prova é uma cadeia de afirmações, implícitas ou explícitas que através dos axiomas nos provam que as afirmações são verdadeiras." (Gerstein, 1996).

Nas primeiras cinco definições, considera-se como prova uma série de afirmações ou passos, cada um dos quais é uma dedução lógica a partir de um axioma ou teorema. Na quinta definição, afirma-se que os passos lógicos implicam irrefutabilidade. As duas últimas enfatizam que as provas devem ser acima de tudo convincentes.

A sexta definição não faz nenhuma referência a axiomas, teoremas, ou mesmo lógica e a sétima sugere que passos lógicos podem ser implicitamente assumidos, em vez de explicitamente indicados.

Steven G. Krantz (Krantz, 2011) afirma que "A maioria dos passos de uma prova matemática são aplicações das regras elementares da lógica (…) existem várias técnicas de prova que tem sido desenvolvidas nos últimos dois séculos. Estas incluem prova por indução, prova por contradição, prova por exaustão, prova por enumeração e muitas outras. Mas todas assentam numa regra simples (…). Esta regra da lógica afirma que se sabemos que 'A implica B' e se conhecemos 'A', então podemos concluir 'B'."

Para Reuben Hersh (Hersh, 1993), o objetivo de uma demonstração matemática em contexto de sala de aula é explicar com o fim de estimular o entendimento dos alunos e não para satisfazer padrões abstratos de 'rigor' e 'veracidade'.

A escola de pensamento platónico, defensora das provas sem palavras, advoga que as verdades matemáticas existem independentemente da semântica e a tarefa é descobri-las através de qualquer meio. Isso deixa em aberto a possibilidade das provas sem palavras serem consideradas provas suficientes de uma verdade matemática.

A raiz grega da palavra 'teorema' (*yeoreµÓ*) significa 'o que se vê' e não o que se demonstra como é entendido hoje em dia (Guzman, 1997).

Assim, as provas sem palavras são consideradas demonstrações ou não, dependendo da filosofia matemática. Contudo, para vários matemáticos, são de extrema importância no Ensino da Matemática e devolvem o significado original à palavra 'teorema'.

1.3. Importância da visualização na apreensão de conceitos matemáticos

O grau de importância atribuído às ajudas visuais no Ensino da Matemática sofreu várias oscilações ao longo dos tempos.

Henri Poincaré, Jacques Hadamard (1865–1963) e Albert Einstein (1879–1955) sublinham a importância do raciocínio informal, do pensamento sem palavras, da imagética, de jogar com diversas ideias. Einstein escreve a Hadamard (Hadamard, 1945):

> As palavras e a linguagem, escrita ou oral, parecem não desempenhar qualquer papel no meu pensamento. Os construtos psicológicos que são os elementos do pensamento são certos sinais ou imagens, mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados livremente.

Para Bruno Munari (Munari, 1968), arquitecto, escultor, professor, escritor e filósofo italiano, "conhecer as imagens que nos rodeiam significa também alargar as possibilidades de contacto com a realidade, significa ver mais e perceber mais".

As primeiras pesquisas fundamentadas pela Psicologia em visualização no ensino e na aprendizagem da Matemática, com uma abordagem qualitativa e quantitativa, surgiram no início da década de oitenta e só na década de noventa é que a pesquisa foi reconhecida na Educação Matemática.

Norma Presmeg (Presmeg, 2006) faz um resumo sobre o ressurgimento das pesquisas sobre visualização no ensino e aprendizagem da Matemática nas Conferências Anuais do Grupo Internacional de Psicologia em Educação Matemática (PME). Na décima segunda conferência em 1988, em Veszprém, Hungria, Alan J. Bishop apresentou a sua revisão de pesquisas sobre a visualização na Educação Matemática. O autor (Bishop, 1989) fez estudos sobre o impacto da visualização no currículo escolar que destacam a sua importância em Matemática, tanto para a transmissão de conhecimentos como na formação de conceitos matemáticos. Este autor não descarta a realidade da existência de estudantes que possuem uma habilidade para a visualização mais desenvolvida relativamente a outros. Estando o conceito de visualização ligado às ideias de imaginação e habilidade espacial, diagramas e intuição constituem ideias importantes para a Educação Matemática. Bishop salienta a importância de interligar os conceitos de visualização, imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, pela sua forte utilidade para a Educação Matemática e a necessidade de uma melhor compreensão dos mesmos.

A visualização passou a ser reconhecida como campo significativo no Ensino da Matemática (Sales, 2013).

Na décima quinta conferência PME, em Assis, Itália, Dreyfus (Dreyfus, 1991) defendeu a importância da visualização para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da Matemática. No seu entender, a sua implementação na sala de aula não acontecia pelo facto dos responsáveis pelo desenvolvimento do currículo, ou até mesmo os professores, não lhe atribuíam o verdadeiro valor, assim como pelo facto de ser necessário

um trabalho árduo para se adquirir raciocínio visual. Segundo Dreyfus, os currículos devem "contemplar a visualização como processo de construção do pensar matematicamente, possibilitando aos alunos desenvolver uma melhor e mais profunda compreensão de conceitos matemáticos" (apud Leivas, 2009).
Vários estudos realizados concluiram que as imagens são mais eficazes na memorização do que apenas as palavras. Para Alain Lieury (Lieury, 1997), professor de Psicologia Cognitiva da Universidade de Rennes, em França, especialistas em memória, "a memória de imagens é extremamente poderosa e duradoura (…) a memória das imagens não é a memória 'fotográfica' da conceção popular, mas sim a da síntese da imagem". Para ler uma imagem, é necessário associá-la a palavras ou conceitos, o que leva mais tempo, mas permite uma melhor memorização.

A obra de M. C. Escher (1898–1972), artista gráfico holandês, é um exemplo concreto de como as imagens podem aperfeiçoar o entendimento de assuntos complexos, ao invés da exclusiva utilização de palavras. Através das suas pavimentações, ele consegue exemplificar as transformações do plano: translações, rotações e reflexões, tornando-as mais simples aos nossos olhos.

Para o professor americano Lynn Arthur Steen, coeditor da revista *Mathematics Magazine* entre 1976 e 1980, os bons diagramas, onde estão presentes conhecimentos matemáticos, necessitam ser reconhecidos como uma forma de ajudar os alunos a aprender e a não esquecer essas mesmas aprendizagens (apud Miller, 2012).

Claudi Alsina e Roger Nelsen acreditam que as provas sem palavras têm um papel importante no contexto de sala de aula desde o ensino básico até ao universitário, sendo a capacidade de visualizar essencial para o sucesso na Matemática.

E. Paul Goldenberg, Albert Cuoco, June Mark (Goldenberg, et al., 1998) afirmam que "ao ignorar a visualização, um currículo falha não só no envolvimento de uma parte substancial do pensamento dos alunos ao serviço do raciocínio matemático, como no desenvolvimento de capacidades de visualização para explorar e argumentar visualmente". Para estes investigadores, a visualização e o raciocínio visual são uma âncora para o pensamento matemático dos alunos e para a construção de conhecimentos matemáticos, mesmo para alunos com mais dificuldades. Enriquecer o currículo da disciplina com visualização contribui para a redução do velho problema de falta de equidade. Os alunos devem realizar experiências informais em casa, como construir modelos, manipular estruturas materiais, por exemplo, blocos ou legos, pegar em peças separadas e juntá-los de novo.

Para Steve Benson, Susan Addington, E. Paul Goldenberg, Nina Arshavsky, Albert Cuoco e Eric Karnowski (Benson, et al., 2005), todas as destrezas exigem aprendizagem e devem ser sistematicamente construídas e exercitadas para serem adquiridas. As tarefas que contribuem para essa aprendizagem incluem propostas 'não-matemáticas', como criar e ler imagens mentais para responder a perguntas do tipo "quantas portas tem a própria casa" ou "de que cor estava vestido o colega ao pequeno almoço", ou analisar aspetos visuais (por exemplo, uma face ou uma figura geométrica 'impossível') de modo que se torne possível desenhá-las. Incluem tarefas reconhecidamente mais matemáticas, como imaginar a sombra de um cubo iluminado obliquamente ou os tamanhos e disposição de quadrados (ou cubos) que utilizam dois pontos específicos do espaço como vértices, ou os sólidos que se obtêm quando se empilham camadas finas de material ou quando se rodam figuras planas. Considera que a visualização é um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajudam a construir conexões lógicas e demonstrações. Contudo as destrezas que apoiam a visualização para se desenvolverem têm que constituir uma parte explícita da aprendizagem do estudante.

Vera Lúcia Nojima (Nojima, 1999), professora doutorada em Arquitetura e Urbanismo e pesquisadora na área de Design, escreve sobre comunicação e leitura não verbal:

> A leitura do mundo é antes de tudo visual e não verbal. O uso de estímulo visual e não-verbal é tão antigo quanto a civilização. As formas pictóricas, gráficas, holográficas com que se manifesta são testemunhas de que o homem sempre usou a linguagem visual.

Segundo Andrew Grossfield (Grossfield, 2008), as áreas da Matemática contêm conceitos e ideias maravilhosas que podem despertar a curiosidade natural dos jovens estudantes e encantá-los para aprofundar os seus estudos matemáticos. Os conceitos matemáticos, devidamente apresentados, devem ser suficientes para cativar as mentes dos jovens. Segundo o autor, muitos jovens podem compreender e deleitar-se em apresentações visuais de conceitos matemáticos e a educação analítica deve começar no primeiro ciclo através de sequências de imagens que irão contribuir para uma imagem visual e iluminar alguns conceitos matemáticos, desenvolvendo a capacidade de explorar o desconhecido, a perceção, a intuição e a confiança necessária para explorar e analisar novas situações. Os jovens devem ser encorajados a explorar, a experimentar e a cometer erros sem punição. A experimentação pode ser cara e envolver procedimentos complexos noutras ciências, mas na Matemática está disponível a qualquer momento, para todos, e até pode servir de modelo para outras disciplinas. No seu entender, o nobre objetivo da Matemática seria ensinar os alunos a entender os processos e desenvolver a capacidade de questionar e admirar, o porquê e como as coisas funcionam.

José Carlos Pinto Leivas (Leivas, 2009) na sua tese de doutoramento sobre “Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática” escreveu:

> A imaginação está muito ligada à abstração, assim como à intuição, e essas podem ser complementadas pela visualização, entendendo aqui visualização (…) como um processo capaz de auxiliar na construção do conhecimento matemático, bem como na comunicação dos conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático.

Para Irena Strausová e Roman Hasek (Štrausová, et al., 2013), imagens e diagramas desempenham um papel importante no processo de compreensão de vários conceitos matemáticos e são apropriados para serem usados como prova visual de alguns teoremas e identidades algébricas. Segundo os autores, as provas pictóricas são mais atraentes e aceitáveis para os alunos do que as provas algébricas clássicas, embora nem sempre traduzam a cadeia de pensamento que conduz à prova. Este facto pode em alguns casos ser ultrapassado com a utilização de software de geometria dinâmica.

São várias as argumentações que validam a importância da visualização no Ensino da Matemática.

1.4. Contextualização das provas pictóricas apresentadas

Uma das três grandes finalidades do Programa de Matemática do Ensino Básico em Portugal é a estruturação do pensamento, tendo como objetivo “a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio ‘hipotético-dedutivo'. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis e contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. (…) As metas curriculares, articuladas com o presente programa, apontam para uma construção consistente e coerente do conhecimento. O gosto pela Matemática e pela descoberta de relações entre conceitos matemáticos constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática.” (Ministério da Ciência, 2013)

Cumprindo os objetivos do Programa de Matemática para o Ensino Básico, os próximos dois capítulos apresentam um conjunto de provas pictóricas de identidades algébricas prontas a ser usadas no contexto de sala de aula, de forma a motivar os alunos na descoberta e construção dos conceitos matemáticos. Após uma observação atenta das imagens, o objetivo é que os alunos estabeleçam a respetiva relação com a identidade algébrica, dando significado às expressões algébricas em contexto geométrico, mesmo que para tal seja necessário o professor orientar o aluno nessa mesma observação.

Os tópicos compilados, além da prova pictórica, incluem a indicação do ano de escolaridade a que se destinam, o domínio dos conteúdos, os pré-requisitos a verificar antes de iniciar cada prova, as respetivas aprendizagens visadas, assim como uma proposta de atividade planeada para os alunos que não estabelecem as conexões entre as imagens e a respetiva identidade algébrica. Com esta proposta pretende-se orientar os alunos através de questões, estimulando-os a observar e analisar as imagens, de forma a que estes identifiquem e descrevam propriedades das figuras, deduzam relações entre as mesmas e a respetiva identidade algébrica, desenvolvendo a sua capacidade de análise, o raciocínio visual e a confiança necessária para explorar e analisar novas situações.

Cada prova apresentada pretende colocar o aluno perante o desafio direto de argumentação através do que observa. Temas há em que são apresentadas mais do que uma prova pictórica com o fim de criar pistas visuais diferentes e enriquecer o trabalho.

Será desejável que o professor faça uma verificação dos pré-requisitos necessários, projete as imagens e dê tempo aos alunos para relacionarem as imagens e a identidade algébrica correspondente, permitindo a discussão sobre as conclusões obtidas.

As provas pictóricas incluídas no presente trabalho resultam de adaptações de algumas provas sem palavras compiladas nas obras de Roger Nelsen (Nelsen, 1993, 2000) e deste autor em coautoria com Claudi Alsina (Alsina, et al., 2006, 2009, 2010), bem como em manuais escolares, onde há maior presença de ilustrações na construção de conceitos matemáticos, e de outras partilhadas em *sites* de Matemática na internet.

2. Provas pictóricas de natureza algébrica

A Álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática. Em Portugal, no século XX, tinha um papel importante no currículo de Matemática do ensino básico e secundário. Com o aparecimento da Matemática moderna o seu papel foi reduzido e nos últimos anos voltou novamente a ter um papel importante no currículo.

O grande objetivo do estudo da Álgebra no ensino básico e secundário é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações, funções, outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos, ou de outros domínios assim como manipulação de símbolos.

O pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

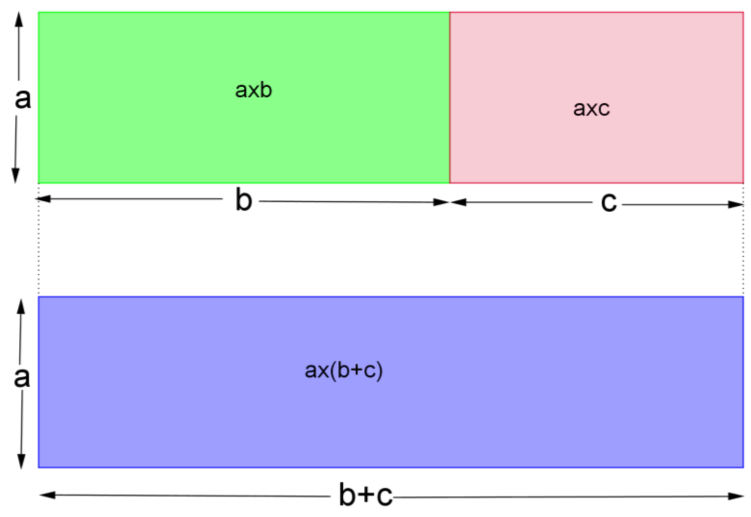
A primeira vertente diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representações. Na segunda vertente – raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente – assume especial importância o relacionar (em particular analisar propriedades de objetos matemáticos), o generalizar (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objetos), assim como o deduzir. Na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objectos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios (Pontes, et al., 2009).

Euclides já evidenciava usar uma álgebra geométrica.

Nas provas pictóricas de natureza algébrica apresentadas seguidamente, pretende-se usar a Geometria como modelo visual para as identidades algébricas.

2.1. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

A primeira prova pictórica apresentada pretende dar sentido à expressão algébrica da distributividade da multiplicação em relação à adição, para números positivos, recorrendo a um argumento geométrico, a comparação da área de figuras equivalentes.



$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Ilustração 4: Prova pictórica da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

Ano: 5º ano

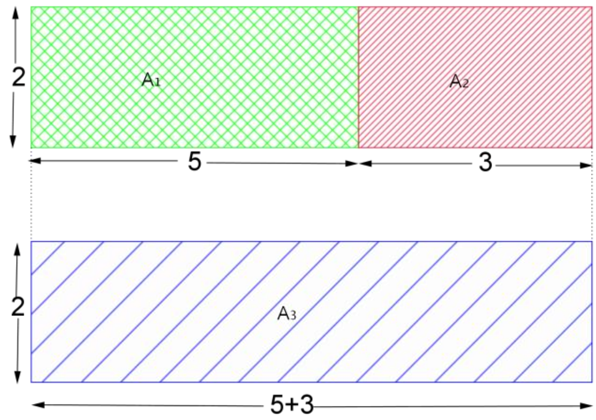
Domínio: Álgebra: expressões algébricas e propriedades das operações.

Pré-requisitos: área do retângulo, figuras equivalentes.

Aprendizagens visadas:
- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- compreender a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Atividade 1: Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

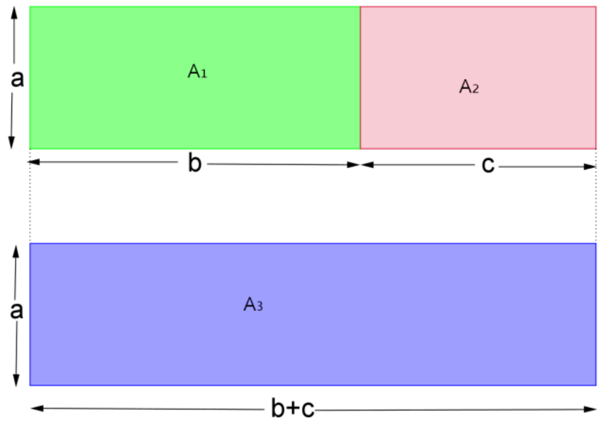
1. Observa as figuras.



Considerando que A_1, A_2 e A_3 representam as áreas dos retângulos anteriores, completa:

$$A_1 = \_\_\_ \times \_\_\_ \, ,$$
$$A_2 = \_\_\_ \times \_\_\_ \, ,$$
$$A_3 = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_).$$

2. Observa as figuras.



Considerando que A_1, A_2 e A_3 representam as áreas dos retângulos anteriores, completa:

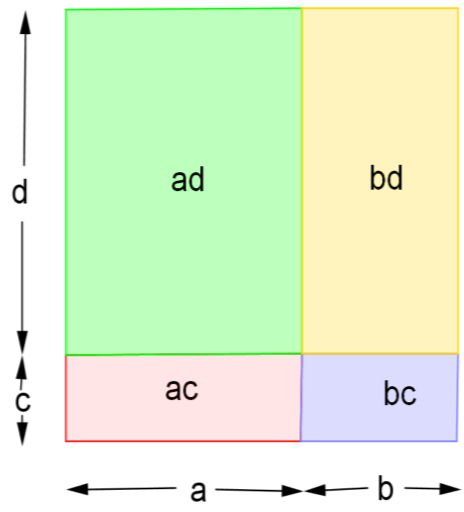
$$A_1 = \_\_\_ \times \_\_\_ \, ,$$
$$A_2 = \_\_\_ \times \_\_\_ \, ,$$
$$A_3 = \_\_\_ \times (\_\_\_ + \_\_\_).$$

Completa a igualdade:

$$a \times (b + c) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2.2. Produto de binómios

Nesta prova pictórica pretende-se que o aluno compare a área do retângulo inicial com as áreas das figuras em que foi decomposto, concluindo a identidade algébrica do produto de binómios, de novo com recurso a um argumento meramente geométrico.



$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Ilustração 5: Prova pictórica do produto de binómios

Ano: 8º ano

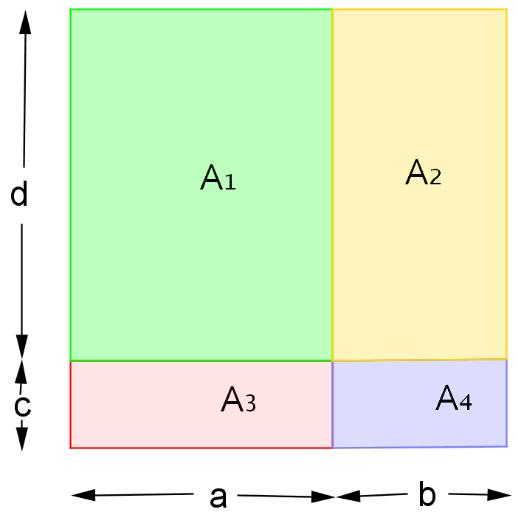
Domínio: Álgebra, monómios e polinómios.

Pré-requisitos: produto de monómios, fórmula da área de retângulos.

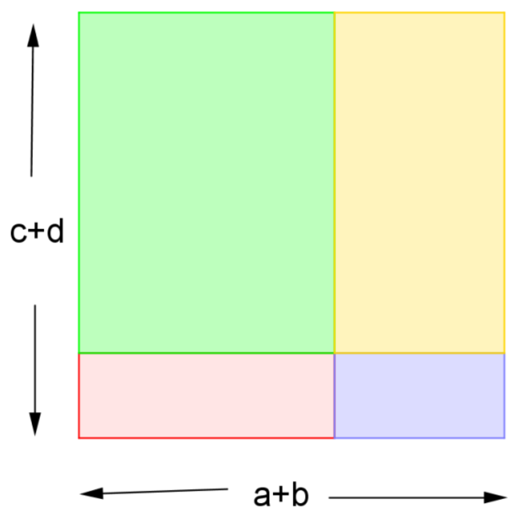
Aprendizagens visadas:
- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- compreender o produto de binómios.

Atividade 2: Produto de binómios

1. Indica uma expressão para as áreas A_1, A_2, A_3 e A_4 dos retângulos da figura seguinte.



2. Indica uma expressão para a área do retângulo com as medidas dos lados indicadas.



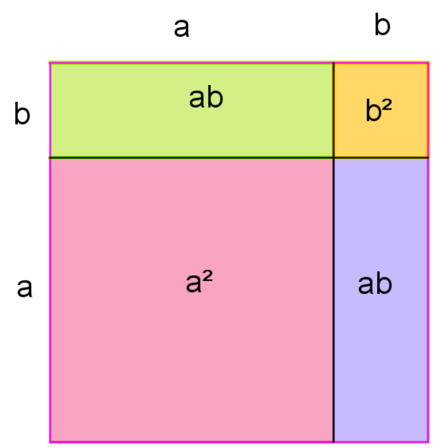
3. Compara as áreas das figuras e completa a igualdade:

$$(a + b) \times (c + d) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

2.3. Casos notáveis da multiplicação de binómios

2.3.1. Quadrado da soma de monómios

Nesta prova pictórica, que é uma caso particular do produto de binómios, pretende-se que o aluno compare a área do quadrado inicial de medida do lado $a + b$ com as áreas das quatro figuras em que foi decomposto para concluir a identidade algébrica do quadrado de uma soma de monómios (Faria, et al., 2011).



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ilustração 6: Prova pictórica do quadrado da soma de monómios

Ano: 8º ano

Domínio: Álgebra, monómios e polinómios, casos notáveis da multiplicação de binómios.

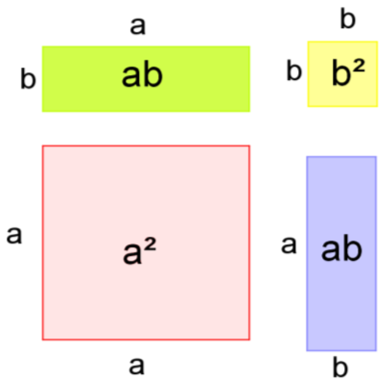
Pré-requisitos: fórmula da área de um retângulo e de um quadrado, adição de monómios semelhantes, figuras equivalentes.

Aprendizagens visadas:

- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir a fórmula do caso notável, quadrado da soma de monómios.

Atividade 3: Quadrado da soma de monómios

Considera as figuras.



1. Recorta as peças coloridas.

2. Cola-os sobre o quadrado inicial.

3. Escreve uma expressão para a medida do lado do quadrado inicial.

4. Escreve uma expressão para a área do quadrado inicial.

5. Completa a igualdade:

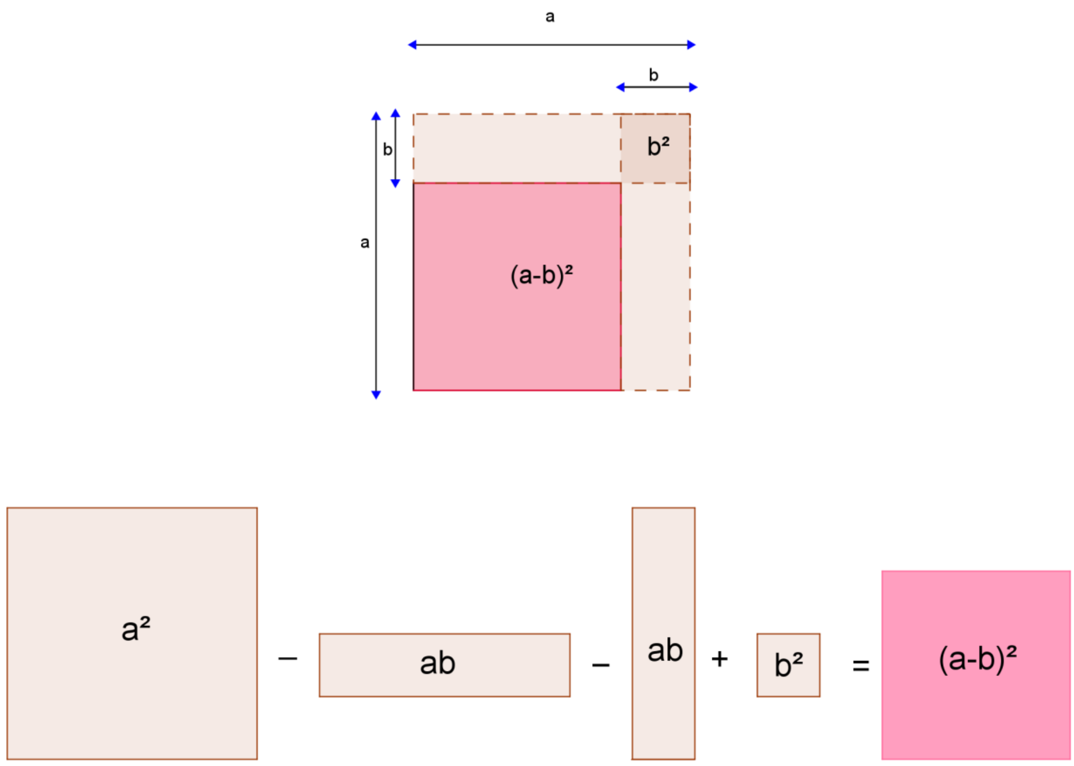
$$(a+b)^2 = \_\_\_ + 2 \times \_\_\_ + \_\_\_.$$

2.3.2. Quadrado da diferença de monómios

Apresentam-se duas provas pictóricas para o quadrado da diferença de monómios.

Na Prova I pretende-se que os alunos observem a decomposição em peças do quadrado inicial de lado a, que contém um quadrado de lado b, e o rearranjo das peças de forma a obter-se um quadrado de lado $a - b$ (Casos notáveis, 1999).

Prova I

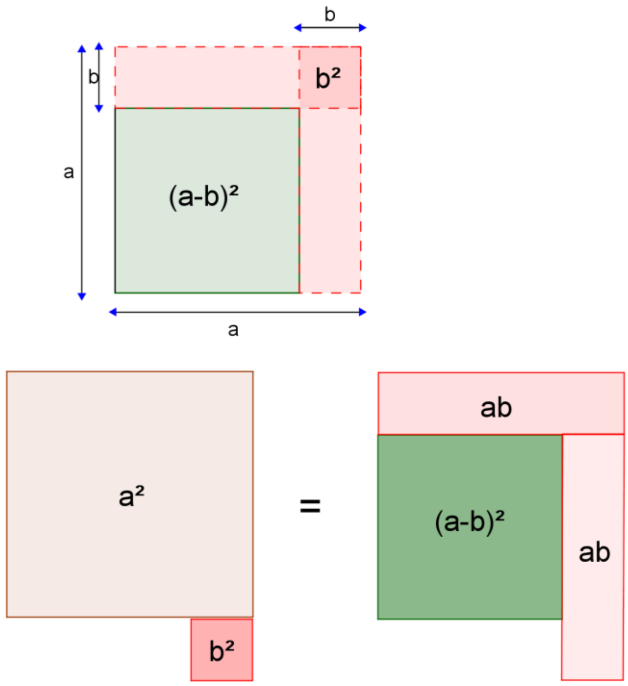


$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

Ilustração 7: Prova pictórica I do quadrado da diferença de monómios

A Prova II sugere equivalência de figuras entre a soma do quadrado dos monómios e a soma do quadrado de $a - b$ com 2ab.

Prova II



$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

ou

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2\,a\,b$$

lustração 8: Prova pictórica II do quadrado da diferença de monómios

Ano: 8º ano

Domínio: Álgebra, monómios e polinómios, casos notáveis da multiplicação de binómios.

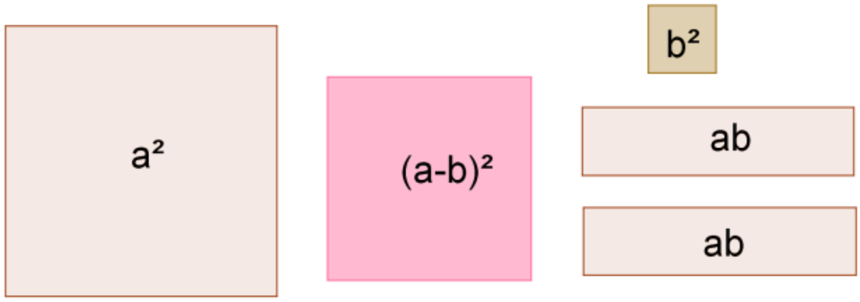
Pré-requisitos: fórmula da área de um retângulo e de um quadrado, adição de monómios semelhantes, figuras equivalentes.

Aprendizagens visadas:

- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir a fórmula do caso notável, quadrado da diferença de monómios.

Atividade 4: Quadrado da diferença de monómios

1. Recorta as peças a seguir apresentadas e constrói duas figuras equivalentes.



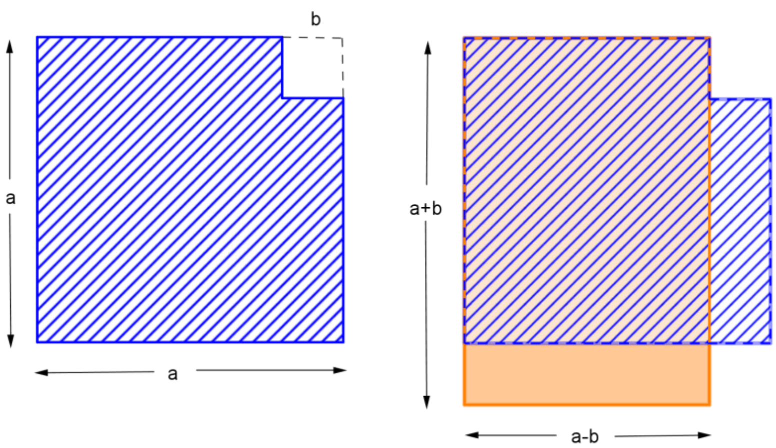
2. Escreve uma igualdade entre as áreas das figuras equivalentes construídas.

3. Completa a igualdade:

$$(a-b)^2 = \_\_\_\_ - 2\times \_\_\_\_ + \_\_\_\_.$$

2.3.3. Diferença de quadrados

Após observação da sobreposição das figuras da prova seguinte, pretende-se que os alunos concluam que estas são figuras equivalentes e a partir da igualdade entre as suas áreas deduzam a identidade algébrica correspondente à diferença de quadradados.



$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Ilustração 9: Prova pictórica da diferença de quadrados

Ano: 8º ano

Domínio: Álgebra, monómios e polinómios, casos notáveis da multiplicação de binómios.

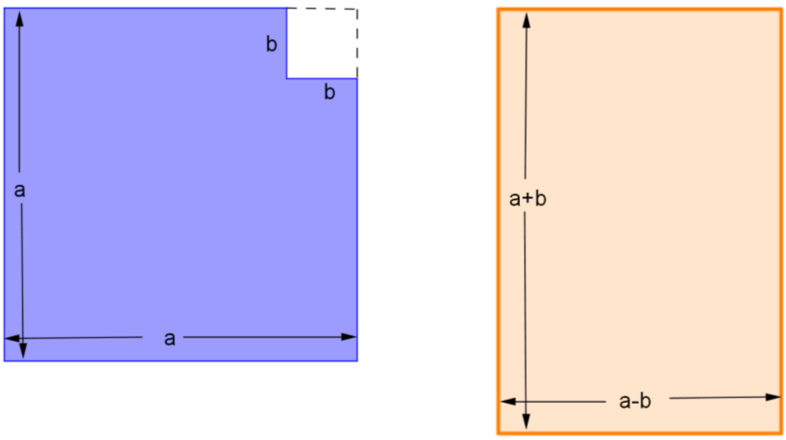
Pré-requisitos: fórmula da área de um retângulo e de um quadrado, figuras equivalentes.

Aprendizagens visadas:

- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir a fórmula do caso notável da diferença de quadrados.

Atividade 5: Diferença de quadrados

Observa as figuras.



1. Recorta as figuras.

2. Prova que as figuras são equivalentes, por sobreposição das figuras e fazendo os cortes que consideres necessários.

3. Completa a igualdade:

$$a^2 - b^2 = \_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_.$$

2.4. Sequências

A representação 'figurada' de números naturais ficou associada à escola pitagórica e ao seu fundador, Pitágoras de Samos. Os pitagóricos viam o papel dos números no mundo de uma forma especial. Nessa época, ainda se contava com pedrinhas ou através de marcas de pontos na areia. Como os pitagóricos eram observadores atentos de formas geométricas, foram os primeiros a chamar de números figurados aos números que resultam de arranjos com pontos ou pedrinhas na areia, de modo a formar figuras geométricas (Sérgio, 2014) .

A observação de sequências permite o reconhecimento de padrões e diversas relações entre os números. O reconhecimento de regularidades e padrões em sequências numéricas e a formulação e comunicação de generalizações desenvolve o sentido do número e o pensamento algébrico, permitindo que a aprendizagem da Álgebra se processe de uma forma gradual.

No 6º ano, no domínio da Álgebra, sequências e regularidades, os alunos deverão ser capazes de observar regularidades, determinar termos e expressões geradoras de sequências, assim como resolver problemas, envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. Neste momento, as sequências pictóricas despertam um maior interesse nos alunos do que as sequências numéricas. O mesmo tema é abordado novamente no 7º ano, no domínio das funções. Os alunos só estudam as sucessões com mais profundidade no 11º ano e apenas nessa altura abordam a demonstração pelo princípio da indução matemática.

As provas visuais que se apresentam de seguida, mais do que demonstrar, pretendem 'mostrar' o que se passa e despertar a curiosidade dos alunos pela descoberta de padrões.

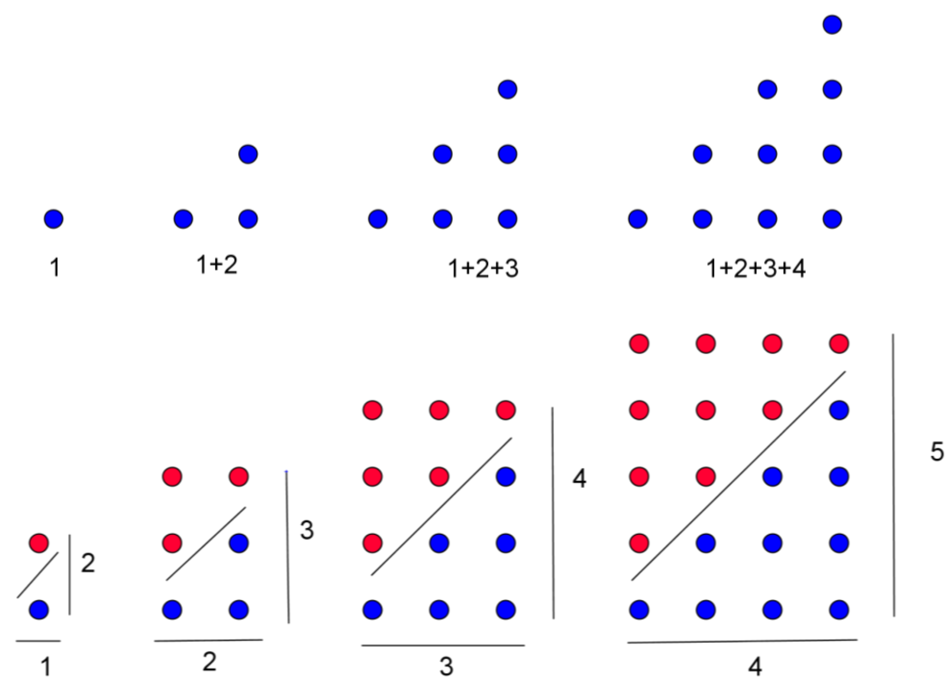
2.4.1. Soma dos *n* primeiros números naturais

Acerca da soma dos primeiros números naturais, existe uma lenda matemática famosa. Conta-se que Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), um matemático brilhante, quando tinha cerca de dez anos, deu uma lição ao professor quando este entregou aos alunos um exercício fastidioso na esperança de os manter sossegados durante algum tempo: somar todos os números de 1 a 100. Cada um deveria anotar o resultado na pequena ardósia e colocá-la na mesa do professor. Os colegas de Gauss dedicaram-se às contas. Após um momento de concentração, Gauss escreveu um número e apresentou-o ao seu professor. Todos estranharam, mas quando verificaram o resultado estava correto. Em vez de somar $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$, teria somado $(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51)$. Como todos os pares entre parêntesis somam 101, existindo 50 pares, o total torna-se fácil de calcular: $101 \times 50 = 5050$, obtendo-se a soma dos 100 primeiros números naturais (Crato, 2007).

Pode usar-se a sequência pictórica da soma dos n primeiros números naturais para propor aos alunos a análise da relação entre a ordem do termo da sequência e o número de pontos. Pretende-se que eles observem a forma triangular que os pontos assumem e posteriormente comparem com a forma retangular de n por $n+1$ pontos que resulta após os pontos a vermelho serem acrescentados. Deste modo, conduzimos os alunos à fórmula da área de um triângulo de base n e altura $n+1$, e consequentemente ao termo geral desta sequência

$$\frac{n \times (n+1)}{2}$$

(Alsina, et al., 2006).



$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Ilustração 10: Prova pictórica da soma dos n primeiros números naturais

Ano: 6º ano ou 7º ano

Domínio: Álgebra, sequências e regularidades (6º ano); funções (7º ano).

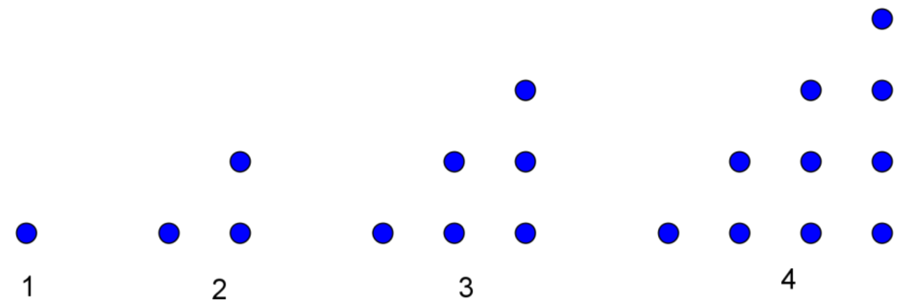
Pré-requisitos: fórmula área de um triângulo e de um retângulo, noção de ordem e de termo de uma sequência.

Aprendizagens visadas:
- relacionar as figuras com a igualdade;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir o termo geral da soma dos *n* primeiros números naturais.

Atividade 6: Soma dos *n* primeiros números naturais

Vamos descobrir sequências misteriosas!

Observa a sequência.



1. Preenche a tabela:

ordem	1	2	3	4
termo				

2. Quantos pontos tem a figura correspondente ao termo de ordem 6 da sequência?

3. Observa as figuras seguintes.

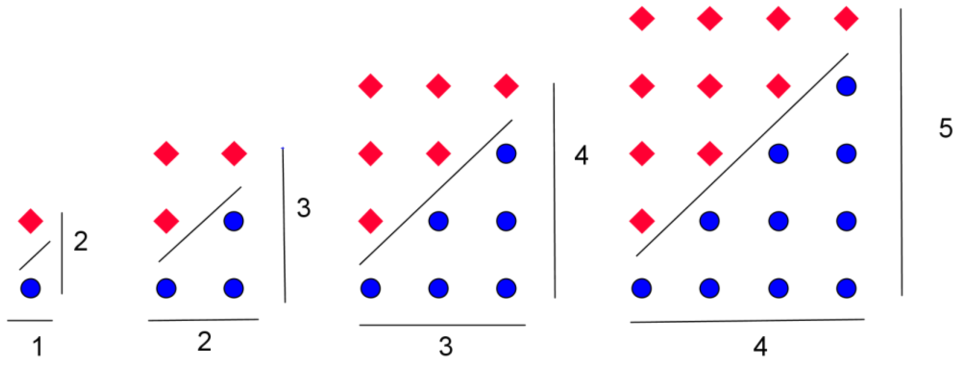


fig.1 fig.2 fig.3 fig.4

3.1 Quantos pontos azuis terá a figura correspondente ao termo de ordem 10?

Sugestão: Relaciona a ordem do termo da sequência e o número de pontos.

3.2. Qual o valor da soma dos 52 primeiros números naturais?

3.3. Um amigo teu vai participar num jogo que a professora dele propôs:

"Descobre, no menor tempo possível, o valor da soma dos primeiros números naturais até …".

Que estratégia lhe sugerias para que descobrisse rapidamente o valor?

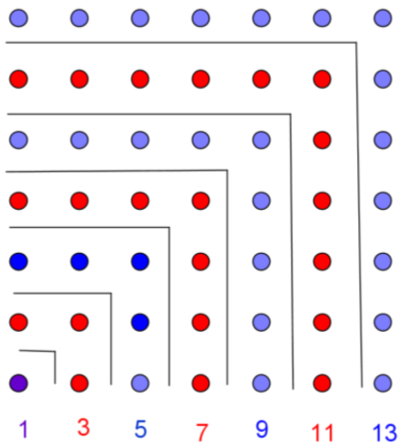
2.4.2. Soma dos *n* primeiros números ímpares

Recorrendo a uma sequência pictórica de pontos para a soma dos n primeiros números ímpares, pode propor-se aos alunos a análise da relação entre a ordem de um termo na sequência e o número de pontos correspondentes.

Sugerem-se duas provas sem palavras. Em ambas as situações, o aluno deve observar a forma quadrangular que os pontos assumem e relacionar com o conceito de quadrado de um número para posteriormente concluir que se trata da soma dos números ímpares consecutivos. Tal facto é realçado com a alternância de cores entre dois números ímpares consecutivos, o que permite orientar os alunos à dedução da respetiva identidade, ou seja, que para todo o número natural n, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

A Prova I atribuída a Nicomachus de Gerasa (cerca de 100 d.C.) está incluída no livro "*Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*" (Nelsen, 1993), fazendo parte da capa de uma das edições deste livro.

Prova I

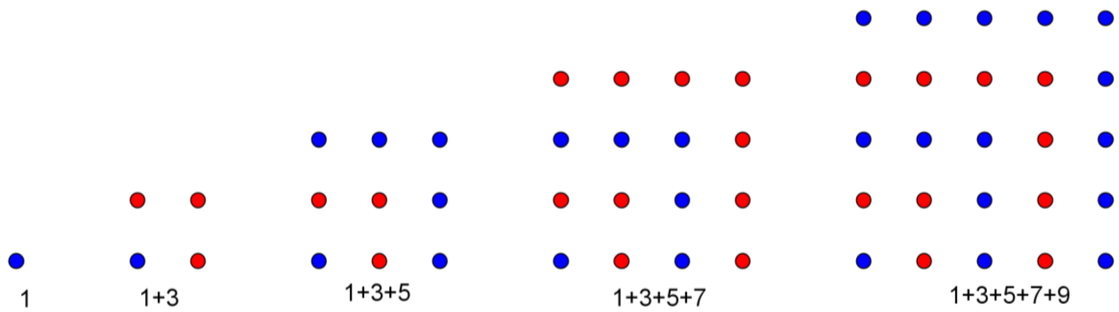


$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ilustração 11: Prova pictórica I da soma dos *n* primeiros números ímpares

A Prova II é uma variante da anterior, mas tem em conta a faixa etária dos alunos a que se destina. Em vez de uma só imagem, apresentam-se os cinco primeiros termos da sequência, criando uma pista visual sobre a sua formação.

Prova II



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ilustração 12: Prova pictórica II da soma dos *n* primeiros números ímpares

Ano: 6º ano ou 7º ano

Domínio: Álgebra, sequências e regularidades (6º ano); funções (7º ano).

Pré-requisitos: noções de ordem e termo de uma sequência, quadrado de um número.

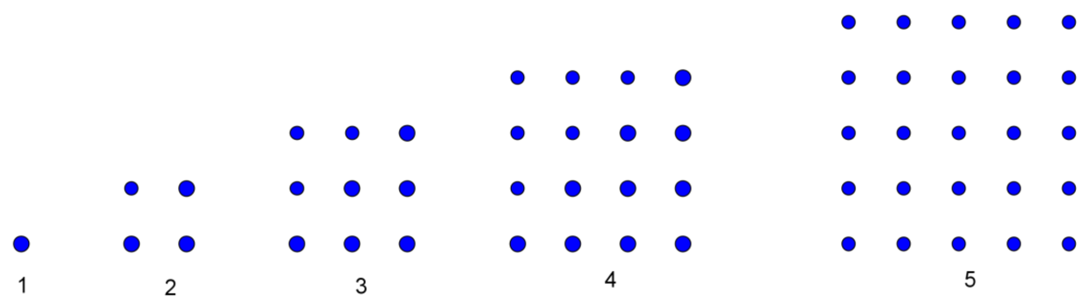
Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir o termo geral da adição dos *n* primeiros números ímpares.

Atividade 7: Soma dos *n* primeiros números ímpares

Vamos descobrir sequências misteriosas!

1. Observa a figura.



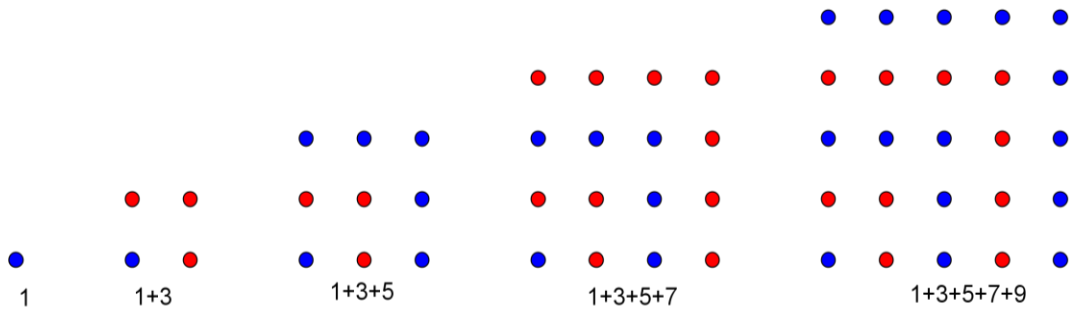
1.1. Preenche a tabela:

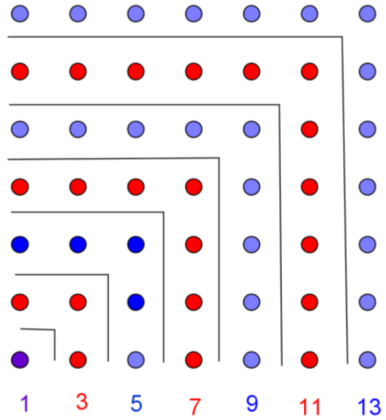
ordem	1	2	3	4	5
termo					

1.2. Quantos pontos tem a figura correspondente ao termo de ordem 6?

1.3. Que regularidade encontras na sequência?

2. Observa agora as figuras seguintes.





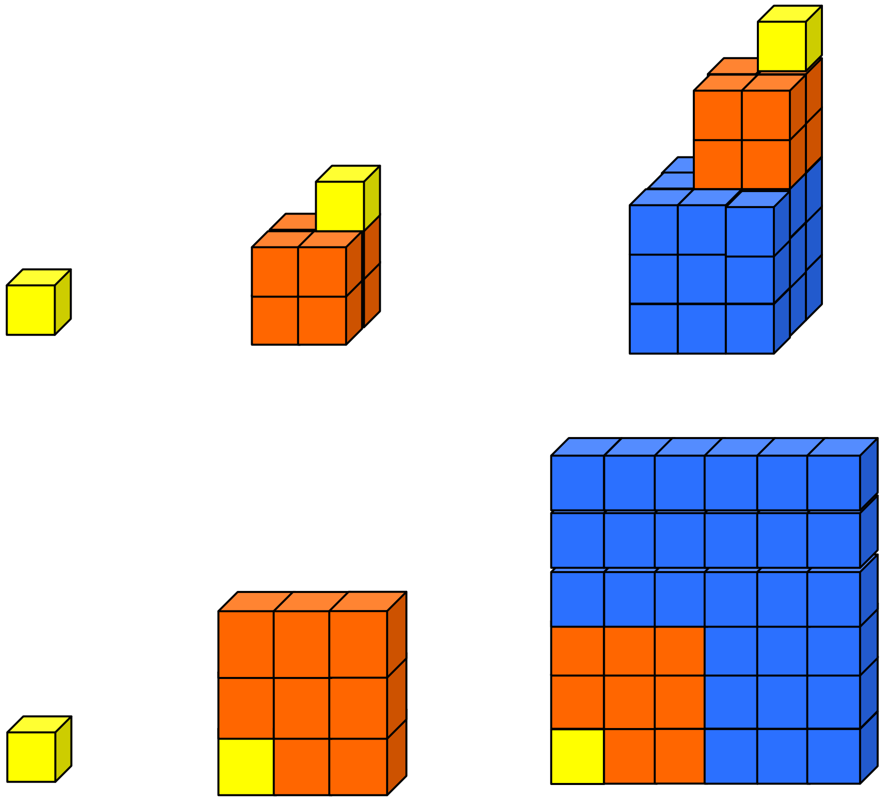
2.1. Determina a soma dos três primeiros números ímpares.

2.2. Determina a soma dos cinco primeiros números ímpares.

2.3. Como explicarias a um amigo uma forma fácil de descobrir a soma dos *n* primeiros números ímpares?

2.4.3. Soma de cubos

A próxima prova visual, pertencente a Alan L. Fry, encontra-se no livro "*Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*" (Nelsen, 1993) e pretende conduzir os alunos à relação entre a soma de cubos dos primeiros números naturais e o quadrado da soma desses mesmos primeiros números consecutivos. Cada número cúbico assume uma cor diferente para que seja evidente a sua participação na construção do quadrado.



$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Ilustração 13: Prova pictórica da soma de cubos

Ano: 6º ano ou 7º ano

Domínio: Álgebra, sequências e regularidades (6º ano); funções (7º ano).

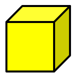
Pré-requisitos: noção de ordem e de termo de uma sequência, noção de quadrado e cubo de um número.

Aprendizagens visadas:

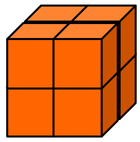
- relacionar as figuras com a igualdade;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir a igualdade da soma dos *n* primeiros números naturais cúbicos.

Atividade 8: Soma de cubos

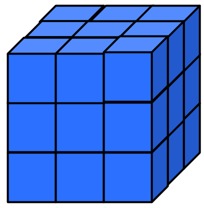
1. Observa as figuras e preenche os espaços em branco.



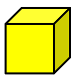
1^3



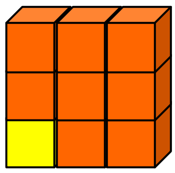
$\underline{\quad}^3$



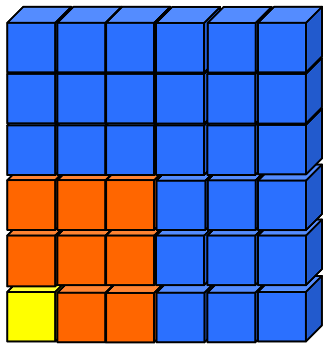
$\underline{\quad}^3$



1^2



$(\underline{\quad}+\underline{\quad})^2$



$(\underline{\quad}+\underline{\quad}+\underline{\quad})^2$

3. Completa a igualdade para a soma dos *n* primeiros cubos de números naturais:

$$1^3+2^3+\underline{\quad}^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^{\underline{\quad}}.$$

3. Provas pictóricas de natureza geométrica

A palavra Geometria é composta por dois termos gregos: *geo* (terra) e *metron* (medida). Desde tempos remotos, o homem teve necessidade de medir. Partilhar terras férteis nas margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Mas a Geometria como ciência dedutiva teve início na Grécia Antiga, cerca de sete séculos antes de Cristo, devido a alguns antecessores de Euclides, como Tales de Mileto (640–546 a.C.), Pitágoras (500 a.C.) e Eudoxio (400 a.C.). Euclides deu um grande contributo para a Geometria ao escrever os treze volumes da obra "Os Elementos", estabelecendo um método de demonstração rigorosa.

Segundo Ana Breda, Lurdes Serrazina, Luís Menezes, Hélia Sousa e Paulo Oliveira (Breda, et al., 2011): "A geometria e a medida são duas áreas da Matemática fundamentais para o dia-a-dia dos cidadãos a que a escola, no entanto, não tem dado a devida atenção. A geometria é normalmente deixado para os finais dos anos letivos e tratada a partir das definições, dando pouco espaço aos alunos para a compreensão dos conceitos geométricos. A medida reduz-se, tradicionalmente, à aplicação de fórmulas e realização de cálculos."

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007) procurou inverter aquela situação, ao propor como ideia central em geometria o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, na noção de grandeza e respetivos processos de medida, bem como na utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida. No terceiro ciclo acresce a compreensão formal das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos.

A Geometria constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial, é um campo propício ao desenvolvimento do pensamento matemático, assim como à realização de investigações e de outras atividades que envolvem aspetos essenciais da natureza da Matemática, como fazer conjeturas e validar essas conjeturas.

As provas pictóricas incluídas neste terceiro capítulo pretendem trabalhar a Geometria de forma intuitiva, levar o aluno a analisar as propriedades das figuras, fazer conjeturas e generalizá-las, no sentido de construir os seus próprios conceitos.

3.1. Teorema de Pitágoras

Pitágoras nasceu no séc. VI a.C. na Grécia; pensa-se que é natural da ilha de Samos e acabou por se fixar em Crotona, no sul da Itália. Fundou a chamada escola pitagórica, onde se estudava Matemática, Filosofia, Música e outras Ciências. O nome Pitágoras vem de "*pythia goras*" que significaria "guiado pelo espírito vidente". Os pitagóricos tinham algumas superstições e para prevenir desgraças usavam o símbolo do pentagrama nas portas das casas e nos sítios que queriam preservar de maus acontecimentos. Apesar de todo o misticismo, tiveram uma influência determinante nos rumos da Filosofia e da Ciência, especialmente da Matemática. Pitágoras foi o primeiro a estabelecer o princípio de que uma proposição científica deve ser totalmente convincente, isto é, verdadeiramente demonstrada. Atribuem-se-lhe diversas descobertas, tais como o sistema de numeração decimal, tabelas de multiplicação e a demonstração do célebre teorema com o seu nome. O Teorema de Pitágoras indica que os gregos conseguiram estabelecer uma ligação abstrata entre números e figuras e que tinham aprendido a demonstrar, e não apenas a persuadir, o que representava um grande avanço (História do Teorema de Pitágoras, 1999).

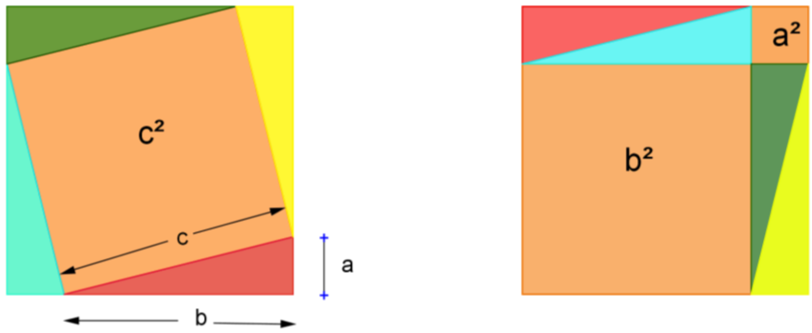
Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Em 1940, o matemático americano Elisha S. Loomis, aos 87 anos, compilou 370 demonstrações diferentes na segunda edição do seu livro "*The Pythagorean Proposition*".

Nos dias de hoje, o Teorema de Pitágoras pode enunciar-se assim: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos".

Serão apresentadas três provas pictóricas do Teorema de Pitágoras, todas elas possíveis de serem realizadas pelos alunos com orientação do professor.

A Prova I é a primeira de "*Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*" (Nelsen, 1993) e foi adaptada do texto *Zhou Bi Suan Jing*. Nesta prova simples e apelativa, os alunos começam por observar o quadrado da hipotenusa do triângulo retângulo e, através do rearranjo das peças iniciais, obtêm a igualdade com a soma dos quadrados dos catetos.

Prova I

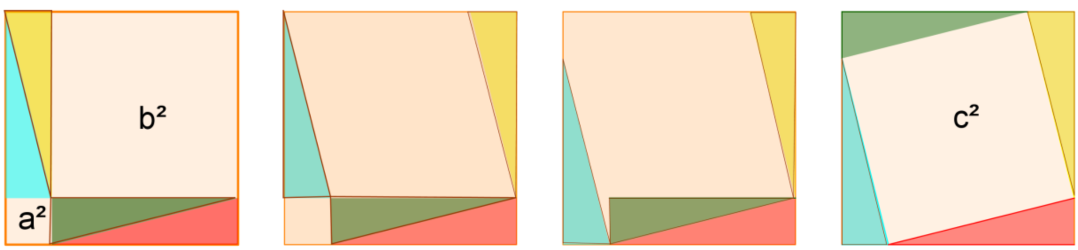


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ilustração 14: Prova pictórica I do Teorema de Pitágoras

A Prova II, também baseada no texto "*Zhou Bi Suan Jing*", encontra-se no livro "*Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*" (Alsina, et al., 2006). Segundo os autores Roger Nelsen e Claudi Alsina, será a prova visual mais elegante do Teorema de Pitágoras. Consiste na translação de três triângulos dentro de um quadrado. Pretende-se que os alunos interpretem visualmente esses movimentos de translação até obter a imagem final e, consequentemente, por comparação com a primeira concluam a relação entre os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa.

Prova II



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ilustração 15: Prova pictórica II do Teorema de Pitágoras

A Prova III recai sobre uma proposta da Experimentoteca, um laboratório de ciências brasileiro (Malagutti, et al., 2013) que disponibiliza atividades experimentais para sala de aula. Esta prova consiste na decomposição em peças dos dois quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo e a sua posterior reorganização de forma a construir o quadrado correspondente à hipotenusa. Assemelha-se a um puzzle, o que pode despertar a curiosidade dos alunos, dada a facilidade na sua visualização.

Prova III

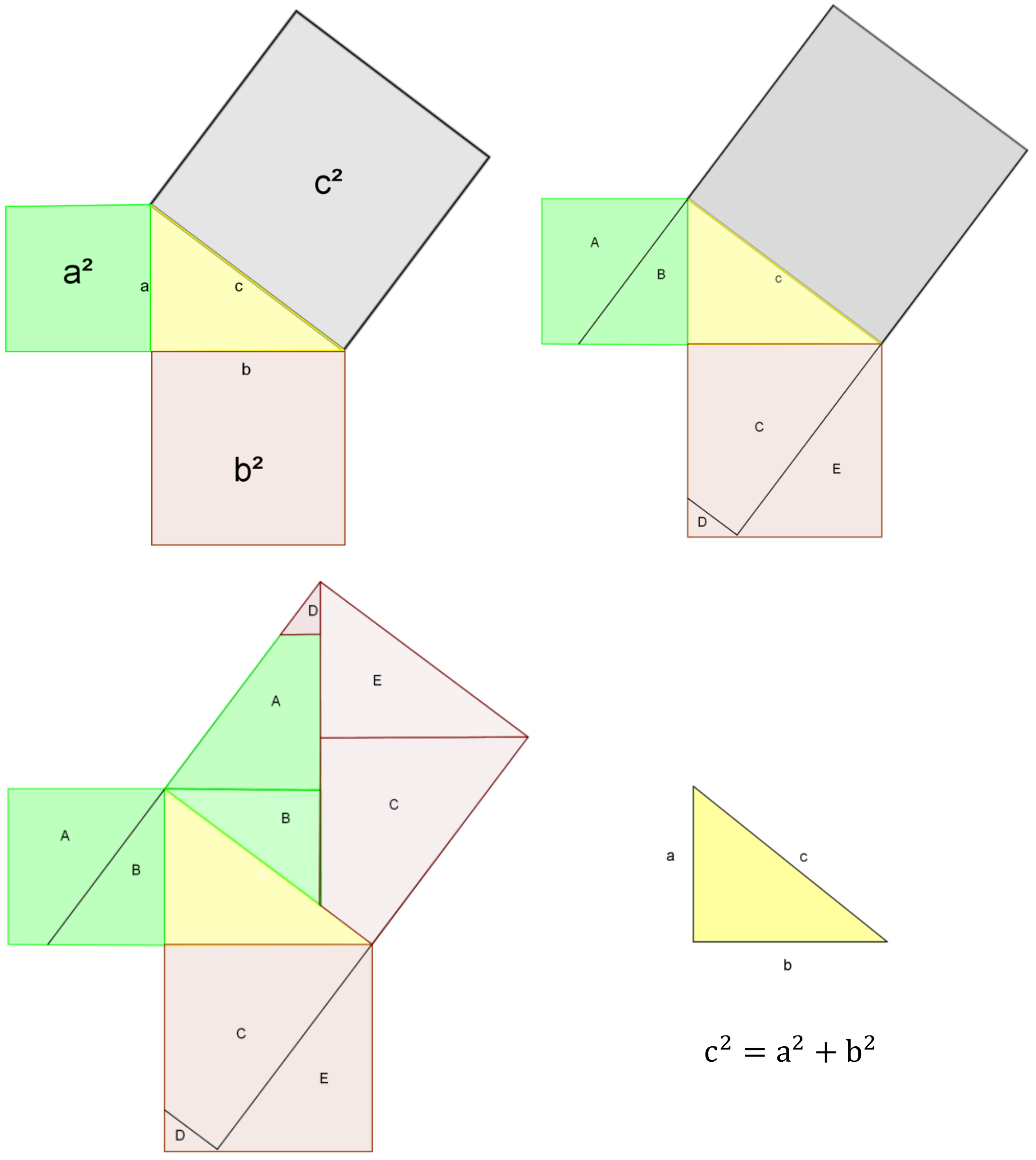


Ilustração 16: Prova pictórica III do Teorema de Pitágoras

Ano: 8º ano

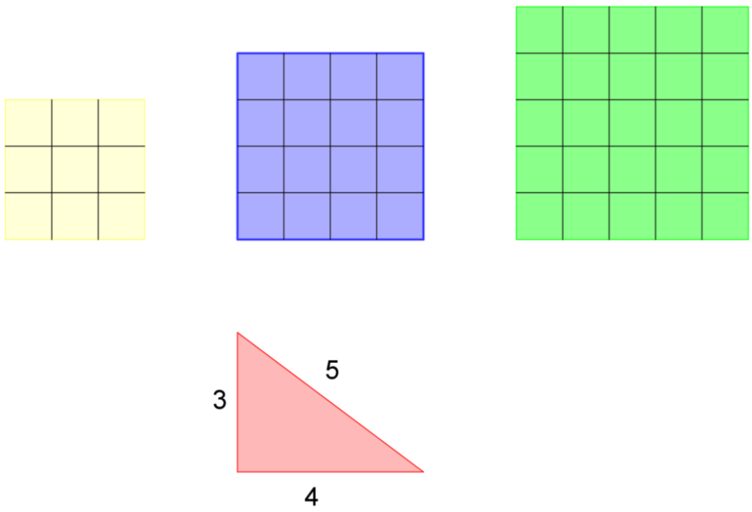
Domínio: Geometria, Teorema de Pitágoras.

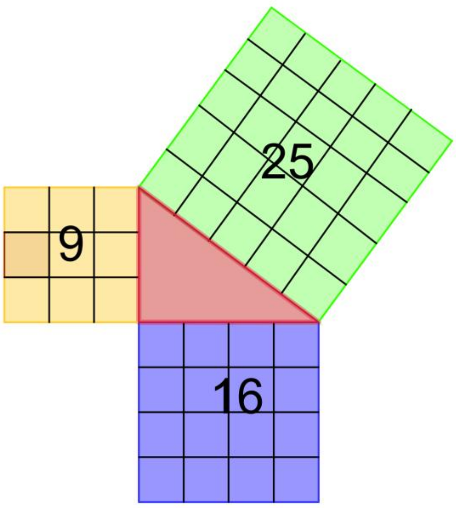
Pré-requisitos: fórmula da área de um quadrado, figuras equivalentes, decomposição de figuras, cateto e hipotenusa de um triângulo retângulo.

Aprendizagens visadas:
- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir o Teorema de Pitágoras.

Na próxima atividade, utiliza-se o terno pitagórico 3, 4 e 5 para medidas dos catetos e hipotenusa do triângulo retângulo, como exemplo sugestivo que convence à generalização.

Atividade 9: Terno pitagórico e Teorema de Pitágoras



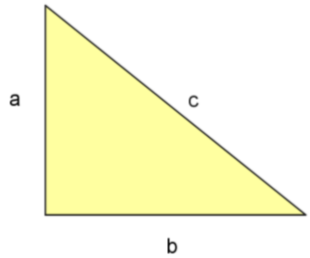


1. Compara a área do quadrado que se encontra sobre o lado da hipotenusa com a área dos quadrados que se encontram sobre os catetos do triângulo retângulo.

2. Completa a igualdade: $5^2 = \_\_^2 + \_\_^2$.

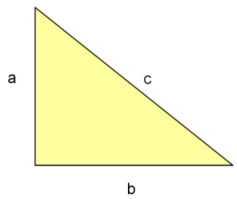
3. Completa o Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo (como o da figura) com medidas dos catetos a, b e da hipotenusa c,

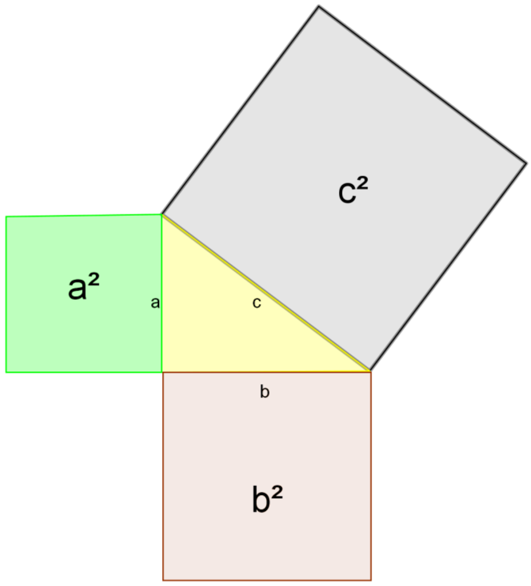
$$c^2 = \_\_^2 + \_\_^2.$$

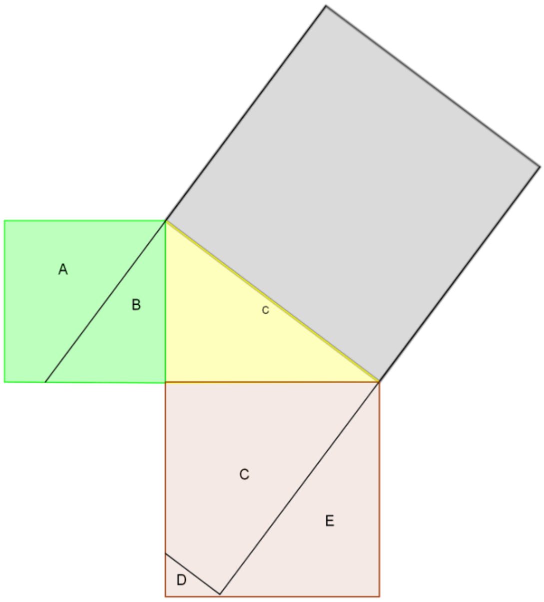


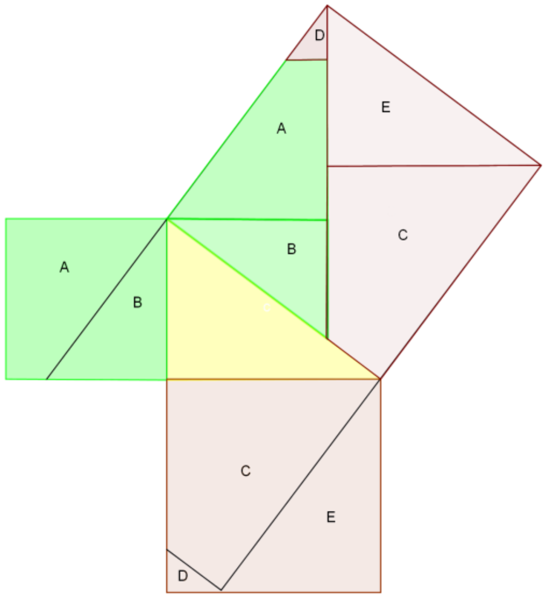
Atividade 10: Teorema de Pitágoras

Com base nas imagens fornecidas, estabelece uma relação entre os lados do triângulo retângulo.







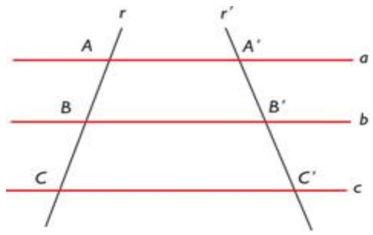


3.2. Teorema de Tales

Tales de Mileto, filósofo, astrónomo e matemático grego, nasceu em Tebas no ano 625 a.C. e morreu em Atenas em 547 a.C., aos 78 anos. Tales de Mileto viajou para o Egito, onde estudou e entrou em contacto com os mistérios da religião egípcia. Atribui-se a Tales de Mileto a previsão de um eclipse do sol, a primeira explicação lógica, até à data, sobre a ocorrência de eclipses em 585 a.C.; a determinação da altura das pirâmides do Egito, utilizando o comprimento da sombra que estas projectam; a demonstração de vários teoremas geométricos, sendo por isto considerado o pai da Geometria; a sustentação da teoria de que a lua brilha por reflexo do sol; a determinação do número exato de dias de um ano.

O Teorema de Tales possui diversas aplicações no quotidiano, constituindo uma importante ferramenta da Geometria no cálculo de distâncias inacessíveis e nas relações envolvendo semelhança entre triângulos.

Pode enunciar-se o Teorema de Tales da seguinte forma: "Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal."

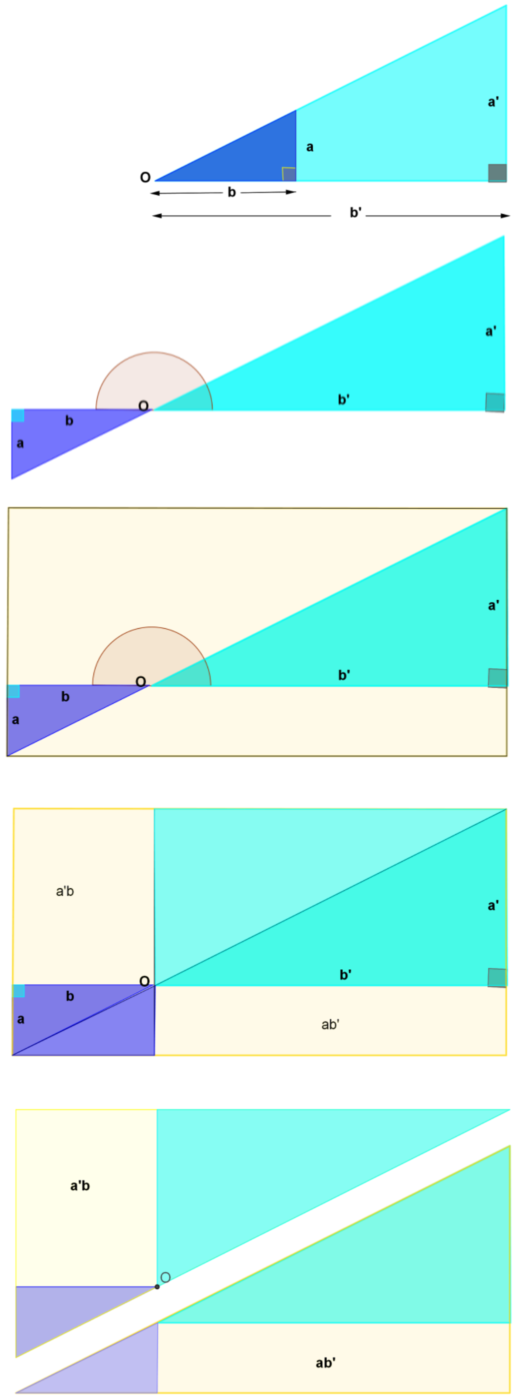


No esquema acima, as retas a, b e c são paralelas e as retas r e r' são transversais. De acordo com o Teorema de Tales, temos as seguintes proporcionalidades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Este teorema aplicado à semelhança de triângulos estabelece que lados correspondentes em triângulos semelhantes são proporcionais.

Apresenta-se uma prova pictórica do Teorema de Tales aplicado a triângulos retângulos semelhantes (Alsina, et al., 2006), em que os alunos são convidados a observar a sobreposição de dois triângulos retângulos, a rotação de 180° com centro em O do triângulo menor, a construção do retângulo à volta destes e a concluir que os pares de triângulos acima e abaixo da diagonal têm a mesma área, logo vale a igualdade entre as áreas dos retângulos remanescentes.



$$a\,b' = a'b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Ilustração 17: Prova pictórica do Teorema de Tales

Ano: 8º ano

Domínio: Geometria, paralelismo, congruência e semelhança; Teorema de Tales.

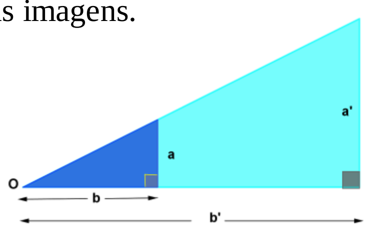
Pré-requisitos: figuras equivalentes, decomposição de figuras, área de um triângulo como sendo metade da área de um retângulo com a mesma base e a mesma altura, propriedade fundamental das proporções.

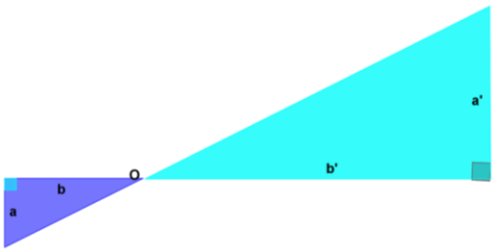
Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir o Teorema de Tales.

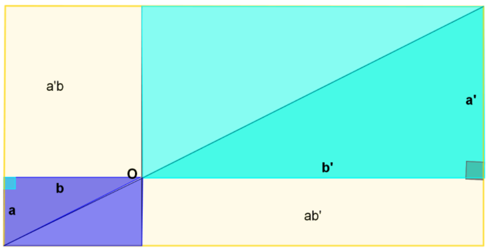
Atividade 11: Teorema de Tales

Observa as imagens.

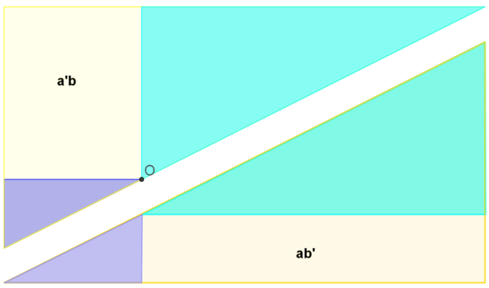




1. Constrói a figura seguinte, tendo em atenção as caraterísticas dos triângulos.



2. Recorta os triângulos, tendo em atenção a figura abaixo, e estabelece uma relação entre as áreas dos triângulos recortados



3. Compara as áreas dos retângulos com área a'b e ab' e escreve uma igualdade.

4. Conclui e regista o Teorema de Tales, aplicado a triângulos retângulos semelhantes.

3.3. Áreas de figuras planas

3.3.1. Área de um paralelogramo

Apresentam-se duas provas pictóricas para a área de um paralelogramo. A primeira compara esta com a área do retângulo e enquadra-se melhor na sequência de aprendizagens do programa de Matemática, pois a área do parelogramo é abordada antes da área do triângulo.

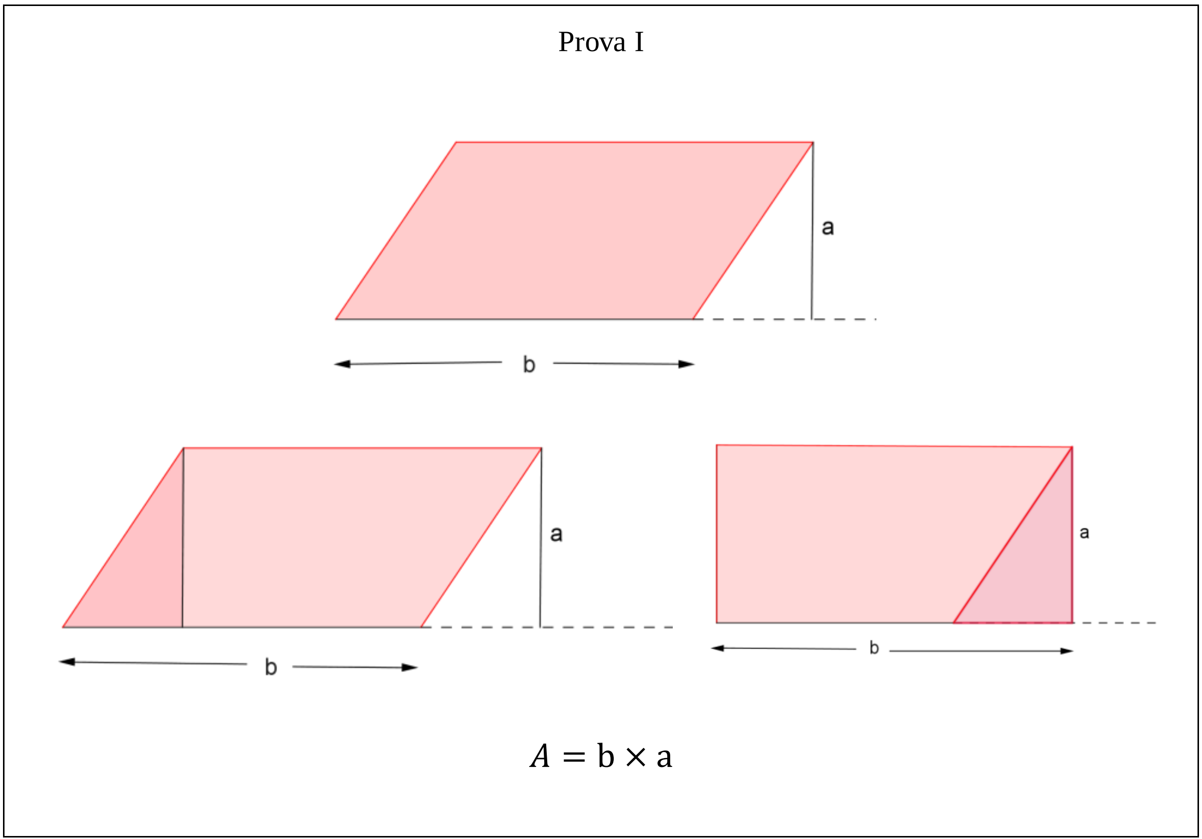
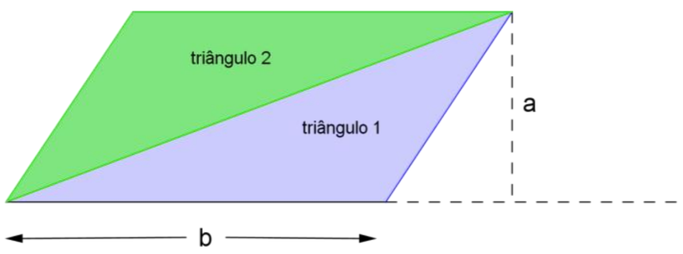


Ilustração 18: Prova pictórica I da área de um paralelogramo

A segunda prova baseia-se na decomposição de um paralelogramo em dois triângulos com a mesma base e a mesma altura. Os alunos devem ser capazes de deduzir que a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo com a mesma base e a mesma altura. Se o professor abordar primeiro a área do triângulo, pode recorrer à prova pictórica relativa à área do triângulo obtusângulo para deduzir a área do paralelogramo.

Prova II



$$A = \mathrm{b} \times \mathrm{a}$$

Ilustração 19: Prova pictórica II da área de um paralelogramo

Ano: 5º ano

Domínio: Geometria, medida, áreas.

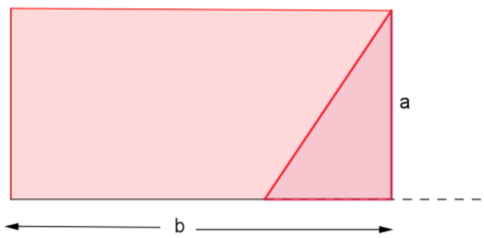
Pré-requisito: fórmula da área do retângulo.

Aprendizagens visadas:

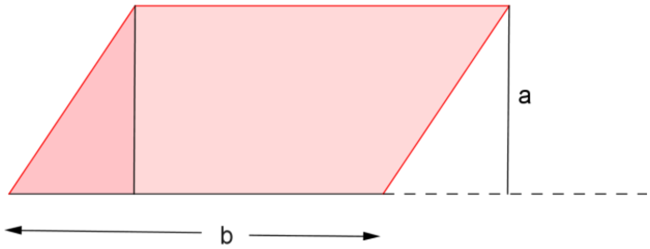
- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área do paralelogramo, altura do paralelogramo.

Atividade 12: Área de um paralelogramo

1. Escreve uma fórmula para a área do retângulo.

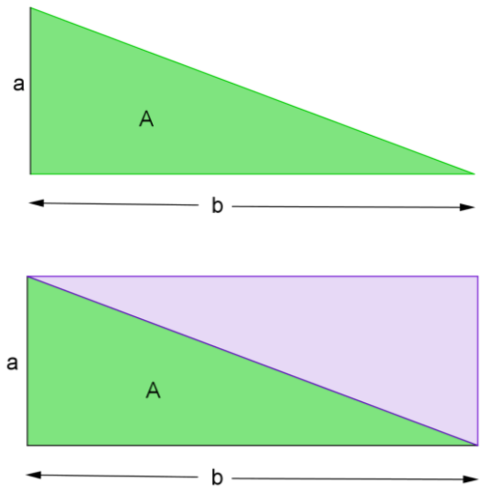


2. Escreve uma fórmula para a área de um paralelogramo, tendo em atenção a figura anterior.



3.3.2. Área de um triângulo

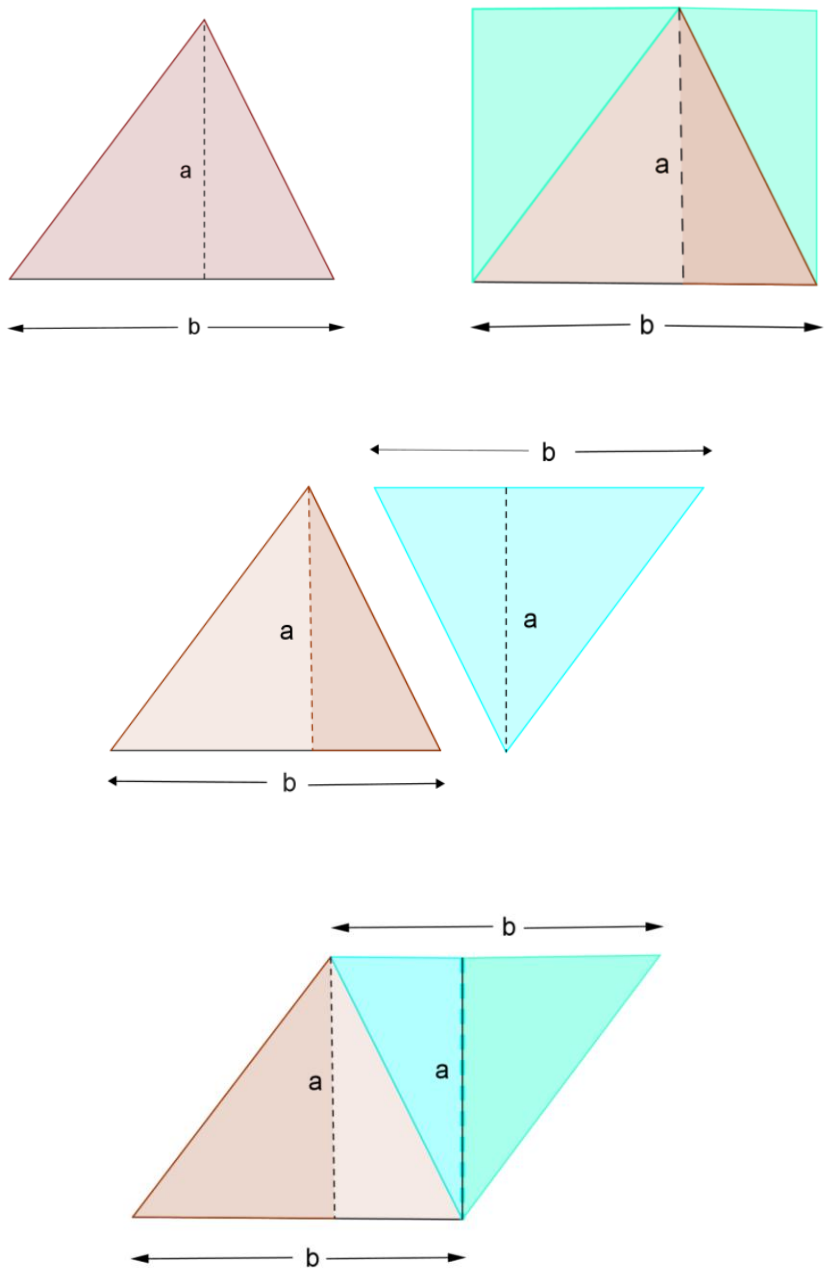
Apresentam-se três provas pictóricas para a área de um triângulo de forma a que os alunos as relacionem com a área de um retângulo ou de um paralelogramo. As provas sem palavras apresentadas referem-se ao triângulo retângulo, acutângulo e obtusângulo, permitindo aos alunos interiorizar a fórmula e compreender que a mesma se aplica a qualquer tipo de triângulo. A primeira a ser explorada será a do triângulo retângulo por ser a que tem uma prova visual mais simples.



$$A = \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{a}}{2}$$

Ilustração 20: Prova pictórica da área de um triângulo retângulo

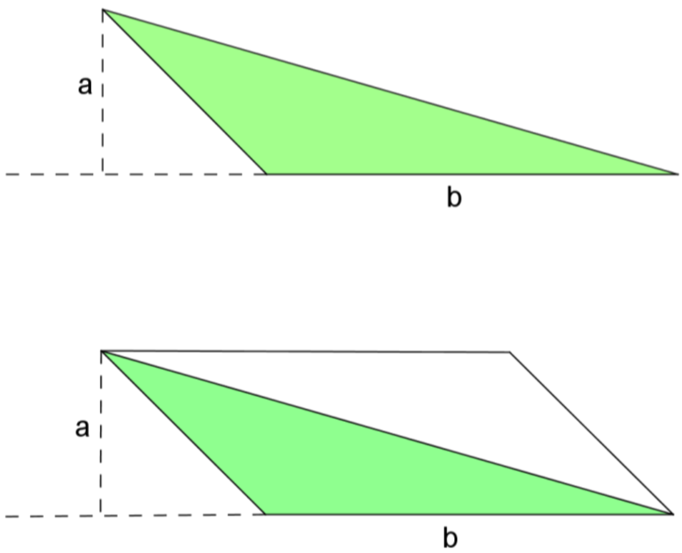
A segunda prova pictórica explora a área no caso do triângulo acutângulo.



$$A = \frac{\mathrm{b} \times \mathrm{a}}{2}$$

Ilustração 21: Prova pictórica da área de um triângulo acutângulo

Finalmente, considera-se o caso de um triângulo obtusângulo e relaciona-se visualmente a sua área com a de um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura.



$$A = \frac{b \times a}{2}$$

Ilustração 22: Prova pictórica da área de um triângulo obtusângulo

Ano: 5º ano

Domínio: Geometria, medida, áreas.

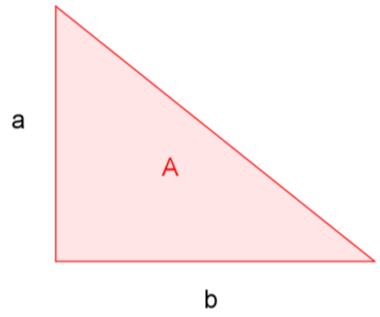
Pré-requisitos: fórmula da área de um retângulo e de um paralelogramo, altura de um triângulo, conceitos das formas geométricas: paralelogramo, triângulo e retângulo.

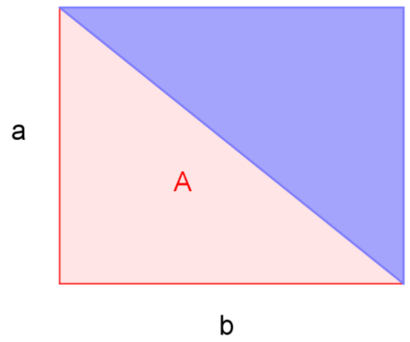
Aprendizagens visadas:
- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área de um triângulo.

Atividade 13: Área de um triângulo

Vamos ver o que acontece com os três tipos de triângulos quanto aos ângulos.

1. Observa as imagens seguintes.

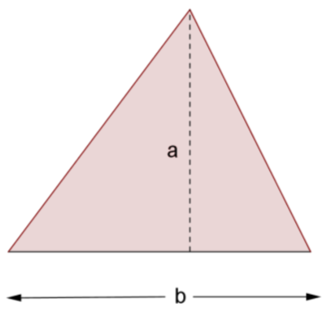


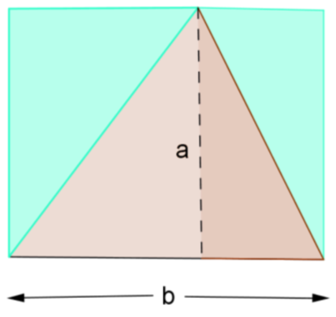


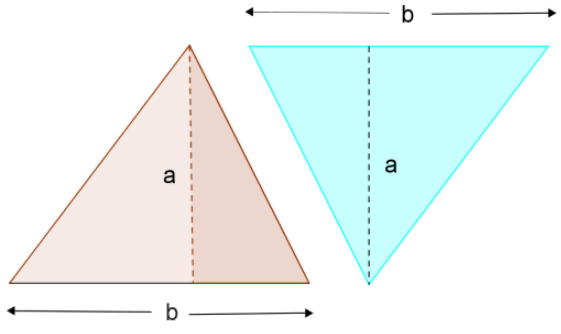
   1.1. Escreve uma expressão para a área do retângulo apresentado.

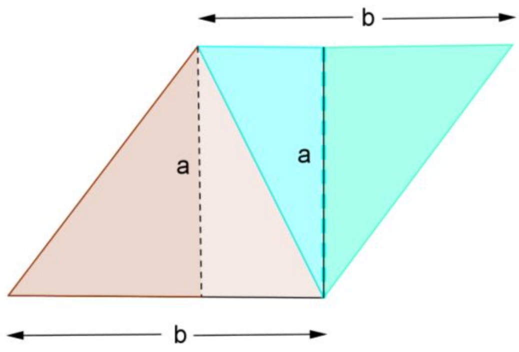
   1.2. Escreve uma expressão para a área do triângulo retângulo apresentado, tendo em atenção a área do retângulo.

2. Observa as imagens seguintes.



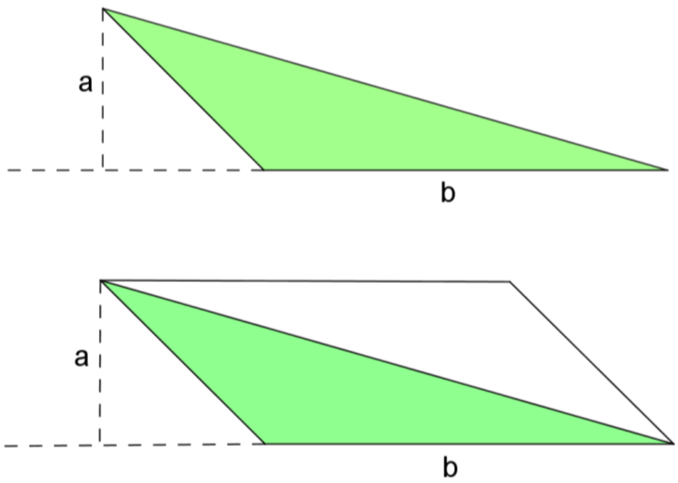






Escreve uma expressão para a área do triângulo acutângulo apresentado, tendo em atenção as imagens anteriores.

3. Observa as imagens seguintes.

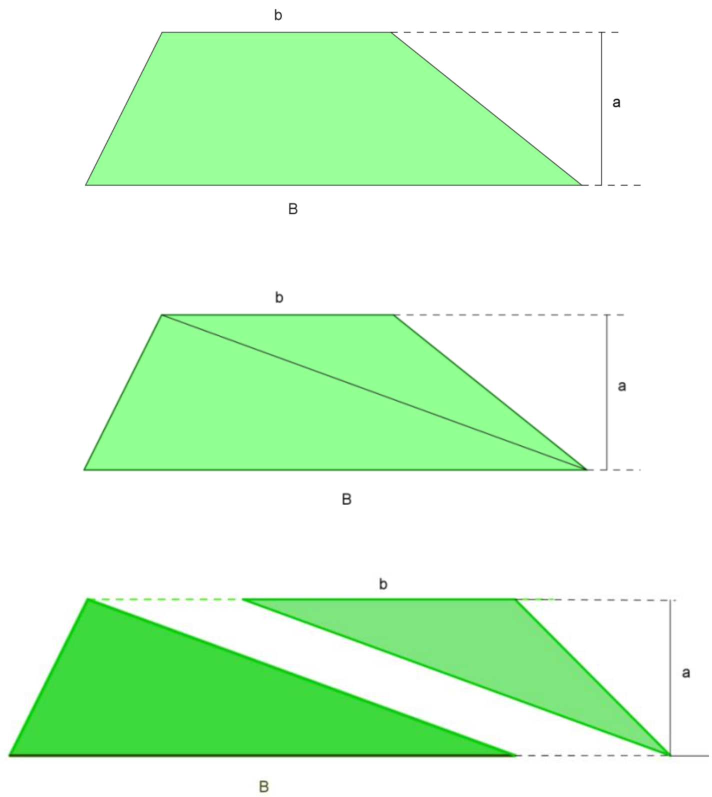


3.1. Escreve uma expressão para a área do paralelogramo apresentado.

3.2. Escreve uma expressão para a área do triângulo obtusângulo apresentado, tendo em atenção a área do paralelogramo e as imagens.

3.3.3. Área de um trapézio

A próxima prova pictórica consiste na visualização do trapézio como dois triângulos com a mesma altura e bases diferentes (Neves, et al., 2011).



$$A = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{b}}{2} \times \mathrm{a} \quad \text{ou} \quad A = \frac{\mathrm{B}\times\mathrm{a}}{2} + \frac{\mathrm{b}\times\mathrm{a}}{2}$$

Ilustração 23: Prova pictórica da área de um trapézio

Ano: 7º ano

Domínio: Geometria, medida, áreas.

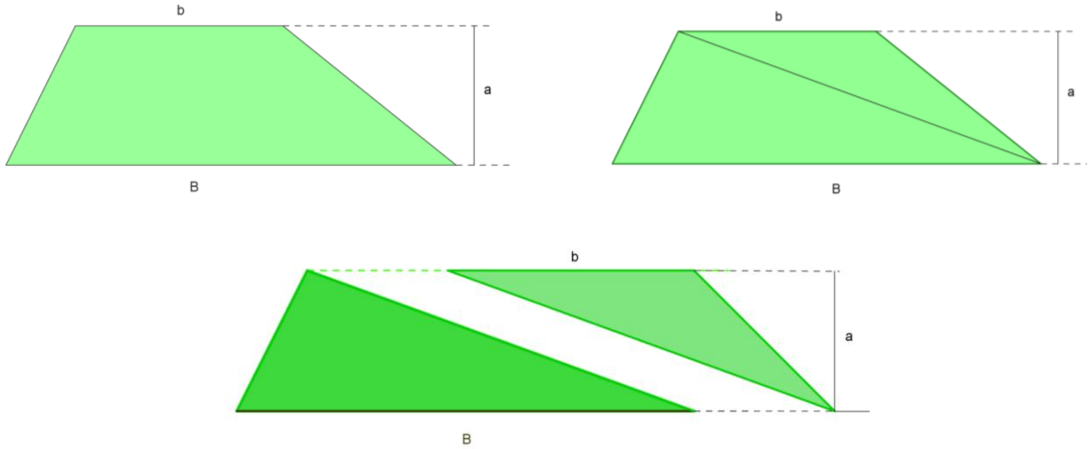
Pré-requisitos: fórmula da área do triângulo, definição de altura de um triângulo.

Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área de um trapézio.

Atividade 14: Área de um trapézio

Observa as figuras.



1. Escreve uma fórmula para a área de cada um dos triângulos da última figura.

2. Escreve uma fórmula para a área do trapézio, tendo em atenção que ele é composto por dois triângulos e simplifica a fórmula que obtiveres.

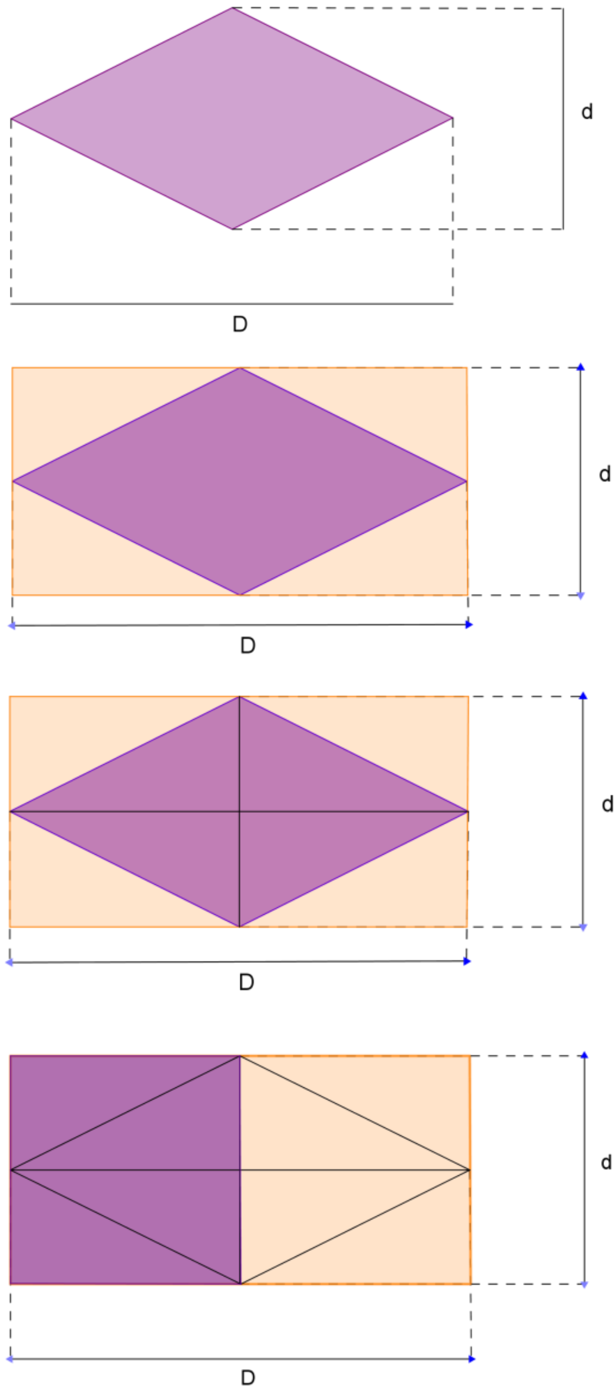
3.3.4. Área de um losango

A próxima prova visual pretende mostrar que a área de um losango é metade da área de um retângulo de comprimento e largura correspondentes às diagonais do losango. De facto, se construirmos uma retângulo à volta do losango de diagonais D e d, sendo estas as dimensões do retângulo, e se o decompusermos em oito triângulos geometricamente iguais, o losango corresponde a quatro desses triângulos, sendo a sua área metade da área do retângulo considerado, ou seja,

$$A = \frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{2}.$$

Também se pode observar que o losango pode ser composto por quatro triângulos geometricamente iguais, cada um de base $\mathrm{D}/2$ e altura $\mathrm{d}/2$ (Tomaz, 2013), e assim a área do losango é dada por

$$A = 4 \times \frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{8} = \frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{2}.$$



$$A = \frac{D \times d}{2}$$

Ilustração 24: Prova pictórica da área de um losango

Ano: 7º ano

Domínio: Geometria, medida, áreas.

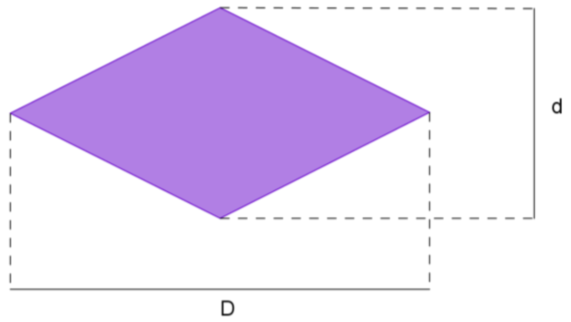
Pré-requisitos: fórmula da área de um retângulo, definição de diagonais de um losango.

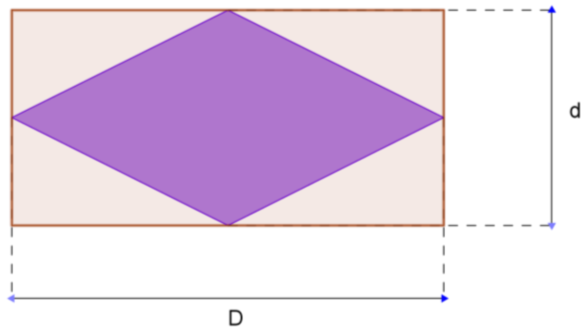
Aprendizagens visadas:

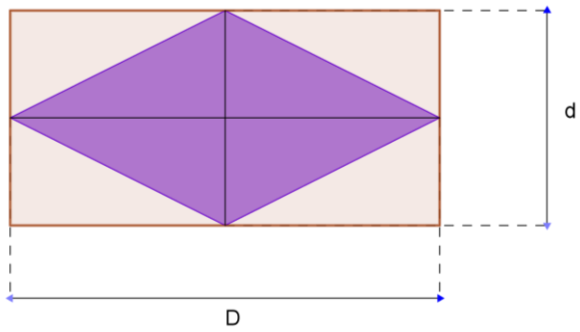
- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área de um losango.

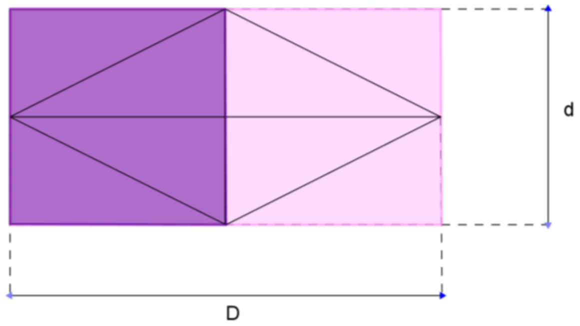
Atividade 15: Área de um losango

Observa as figuras.









1. Escreve uma fórmula para a área do retângulo da última figura.

2. Em quantos triângulos geometricamente iguais está dividido o retângulo?

3. Em quantos triângulos geometricamente iguais está dividido o losango?

4. Escreve uma fórmula para a área do losango, tendo em atenção a área do retângulo.

3.3.5. Área de um círculo

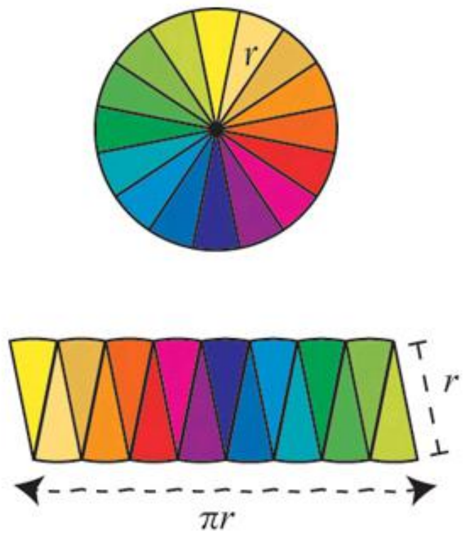
A compreensão da área de um círculo não é simples para o aluno, dado que é o seu primeiro encontro com a ideia de infinito.

Apresentam-se duas provas pictóricas para a área do círculo, contudo apenas a primeira corresponde a uma prova possível de ser apresentada a alunos do 6º ano.

A abordagem seguida na primeira prova baseia-se na interpretação do círculo como uma infinidade de setores circulares que rearranjados formam um 'quase paralelogramo' com comprimento πr e altura *r*. Esta prova é facilmente construída em contexto de sala de aula, considerando a divisão em, por exemplo, 16 setores circulares. Com esta divisão os arcos tornam-se menos percetíveis e o seu rearranjo aproxima-se da forma de um paralelogramo com largura πr e altura *r* como se pretende (Strogatz, 2010).

A segunda prova pictórica considerada para a área do círculo só poderá ser apresentada no 9º ano, após lecionada a área de um polígono regular com *n* lados. Nesse momento, pode ser oportuno rever a área do círculo, relacioná-la com a área de um polígono com *n* lados inscrito na circunferência, interpretando o que ocorre à medida que o número de lados do polígono aumenta.

Prova I



$$A_{\text{círculo}} = \pi\, r^2$$

$$P_{\text{círculo}} = 2\,\pi\, r$$

Ilustração 25: Prova pictórica I da área de um círculo

Ano: 6º ano

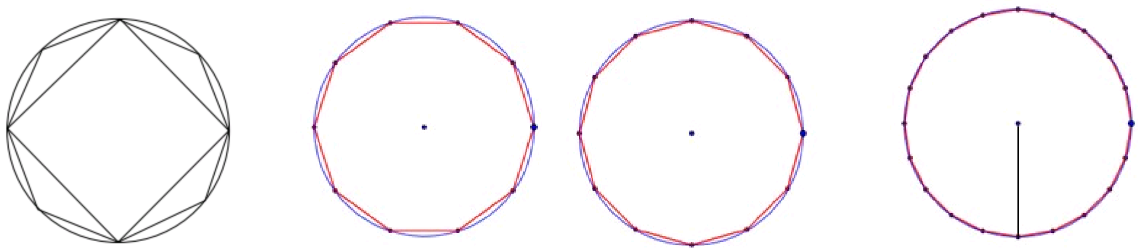
Domínio: Geometria, medida, áreas.

Pré-requisitos: perímetro do círculo, área de um paralelogramo.

Aprendizagens visadas:
- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área de um círculo.

Relativamente à segunda prova pictórica, considera-se um círculo de raio r e polígonos regulares inscritos nesse círculo, com um elevado número de lados. Pretende-se que o aluno observe as imagens e conclua que quanto maior é o número de lados do polígono regular, mais a sua área se aproxima da área do círculo. Assim, o círculo pode ser 'visto' como um polígono regular de 'infinitos lados'. À medida que o número de lados do polígono aumenta, o perímetro P do polígono vai-se aproximando do perímetro da circunferência e o apótema ap do polígono do raio r do círculo. Consequentemente, a área do polígono aproxima-se da área do círculo. Deste modo, conclui-se que a área do círculo corresponde ao limite da sequência das áreas dos polígonos regulares inscritos no círculo, quando o número de lados aumenta arbitrariamente (Tomaz, 2013).

Prova II



$$A_{\text{polígono regular}} = \frac{\mathrm{P}}{2} \times \mathrm{ap}$$

$$\mathrm{ap} \approx r$$

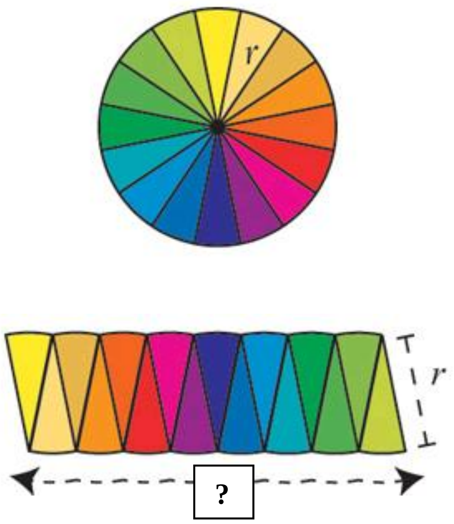
$$P_{\text{círculo}} = 2\,\pi\,r$$

$$A_{\text{círculo}} = \frac{2\,\pi\,r}{2} \times r = \pi\,r^2$$

Ilustração 26: Prova pictórica II da área de um círculo

Apresentam-se seguidamente duas propostas de atividades para os alunos, contemplando a área de um círculo.

Atividade 16: Área de um círculo A



1. Desenha uma circunferência de raio 5 cm e divide o respetivo círculo em 16 secções iguais, fazendo divisões sucessivas.

   Sugestão: Começa por dividir em quatro partes, divide cada uma dessas partes ao meio e depois novamente ao meio.

2. Pinta as secções de cores diferentes.

3. Recorta as respetivas secções.

4. Escreve a fórmula do perímetro de um círculo de raio *r*.

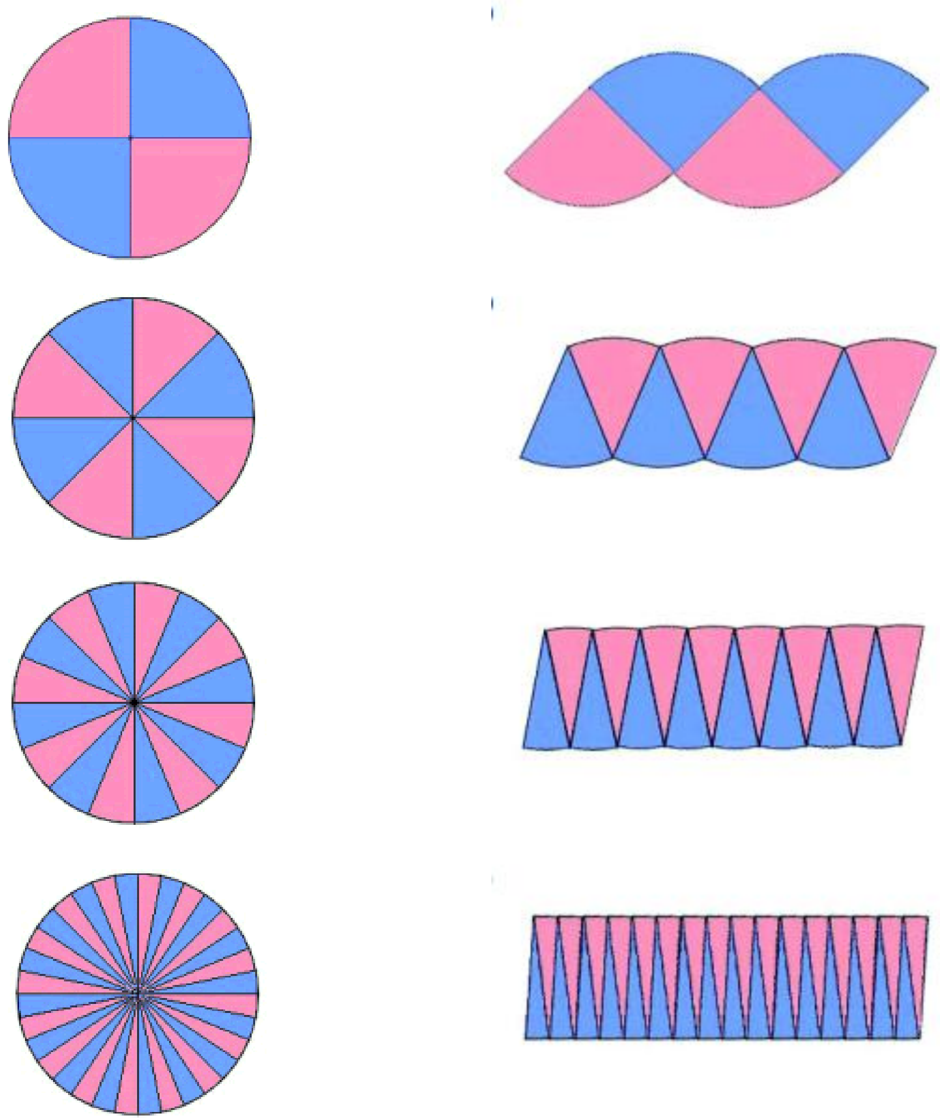
5. Escreve uma expressão para o comprimento da segunda figura, tendo em atenção a expressão do perímetro do círculo.

6. Escreve uma fórmula para a área da segunda figura, considerando que esta se aproxima de um paralelogramo.

7. Conclui a fórmula para a área do círculo.

Atividade 17: Área de um círculo B

Observa as figuras (Lamas, 2011).



1. O que acontece quando se divide o círculo num maior número de setores?

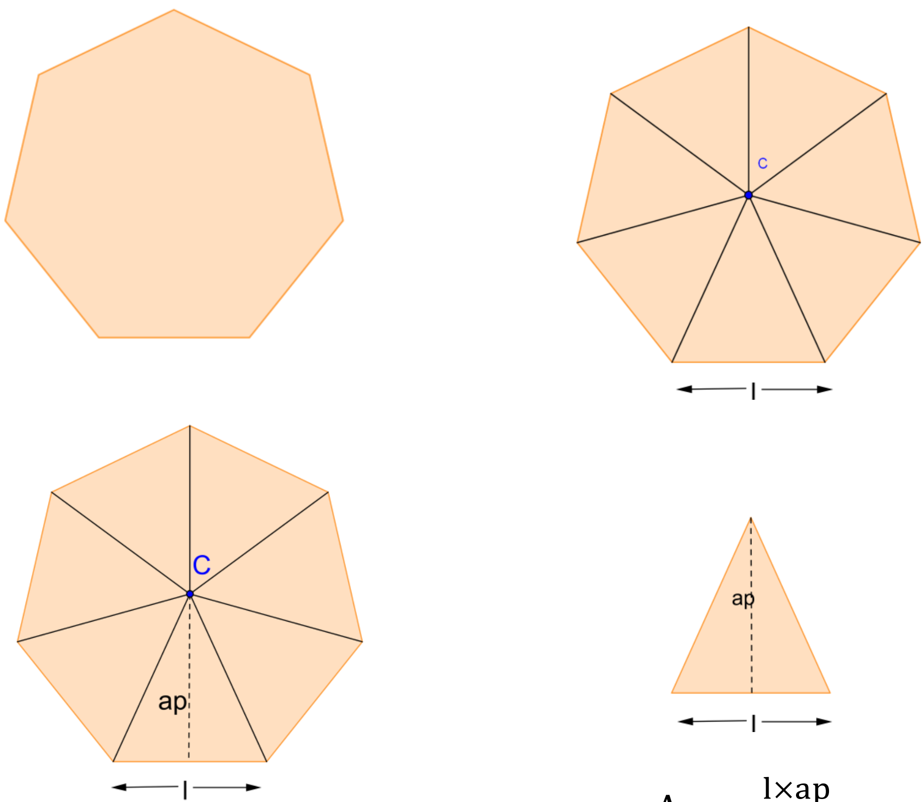
2. De que polígono teu conhecido se aproxima o rearranjo dos setores circulares?

3. Tendo em atenção que o perímetro do círculo é $2\pi r$, indica uma expressão para a medida do comprimento do referido polígono e para a sua altura.

4. Completa: $A_{\text{círculo}} = \pi \times \_\_$.

3.3.6. Área de um polígono regular

A prova sem palavras seguinte refere-se à área de um heptágono regular. Poderia ser escolhido qualquer outro polígono regular, mas o facto de ser um polígono com sete lados não sobrecarrega visualmente a imagem e é uma forma de os alunos observarem e analisarem um polígono menos trabalhado em contexto de sala de aula, devido à dificuldade de construção do mesmo sentida por parte dos alunos.



$$A_\Delta = \frac{l \times ap}{2}$$

$$A_{\text{heptágono}} = 7 \times A_\Delta = \frac{7 \times l \times ap}{2} = \frac{P_{\text{heptágono}}}{2} \times ap$$

$$A_{\text{polígono regular}} = \frac{P_{\text{polígono regular}}}{2} \times ap$$

Ilustração 27: Prova pictórica da área de um polígono regular

Ano: 9º ano

Domínio: Geometria, medida, volumes e áreas de superfícies de sólidos**.**

Pré-requisitos: definição de apótema de um polígono regular, área de um triângulo, perímetro de um polígono.

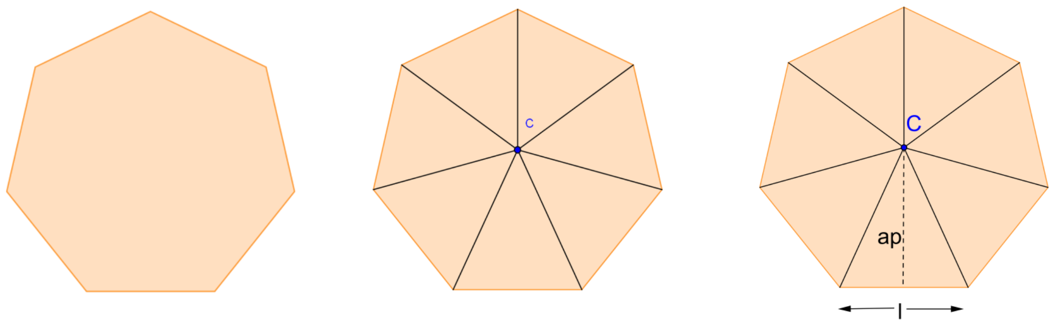
Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da área de um polígono regular.

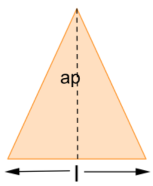
Atividade 18: Área de um polígono regular

Vamos descobrir uma fórmula para a área de um polígono regular!

1. Observa as figuras.



1.1. Escreve a área do triângulo, usando as letras da figura.



1.2. Escreve a área do polígono regular em função da área dos triângulos nele contidos.

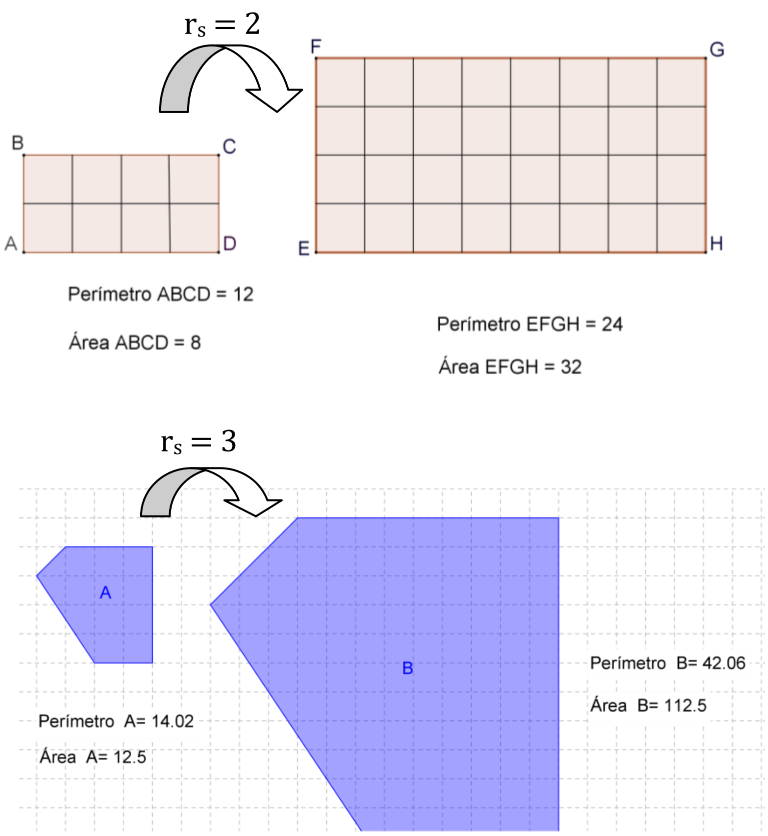
1.3. Conclui uma fórmula para a área do heptágono regular, recorrendo ao seu perímetro.

2. Considera agora um polígono regular de 9 lados, cuja medida do lado é l e apótema ap. Qual a fórmula da área deste polígono?

3. Generaliza a fórmula para um polígono regular com *n* lados.

3.4. Perímetros e áreas de figuras semelhantes

Esta prova pictórica pretende contrariar a ideia de que uma figura ampliada para o dobro tem o dobro de área. Este é um erro muito comum no estudo de figuras semelhantes. Sugerem-se dois casos particulares, primeiramente a ampliação de um retângulo com razão de semelhança dois, seguidamente a de um pentágono irregular com razão de semelhança três. Apresentam-se quadrículas para que os alunos possam fazer uma comparação imediata do perímetro e da área de ambas as figuras, e possam verificar que a relação entre a razão de semelhança e a razão das áreas e dos perímetros se mantém em figuras semelhantes.



Dadas duas figuras semelhantes, a razão entre

- os perímetros é igual à razão de semelhança: $r_P = r_s$;
- as áreas é igual à razão de semelhança ao quadrado: $r_A = r_s^2$.

Ilustração 28: Prova pictórica de perímetros e áreas de figuras semelhantes

Ano: 7º ano

Domínio: Geometria , medida, perímetros e áreas de figuras semelhantes.

Pré-requisitos: definição de figuras semelhantes e razão de semelhança.

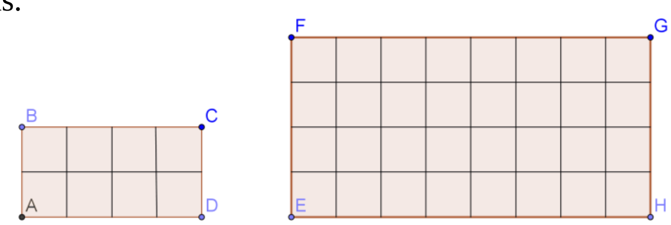
Aprendizagens visadas:

- relacionar conceitos geométricos com algébricos;
- desenvolver a capacidade de comparação e o raciocínio lógico;
- deduzir a relação entre áreas e perímetros de figuras semelhantes.

Atividade 19: Relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes

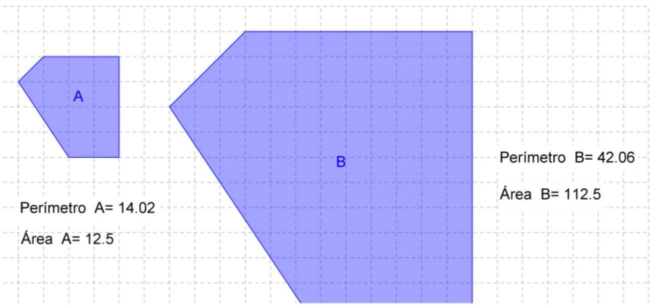
Vamos descobrir a relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes!

1. Observa as figuras.



Relativamente às figuras observadas, indica a razão de semelhança, a razão entre os perímetros e a razão entre as áreas das figuras.

2. Observa as figuras.



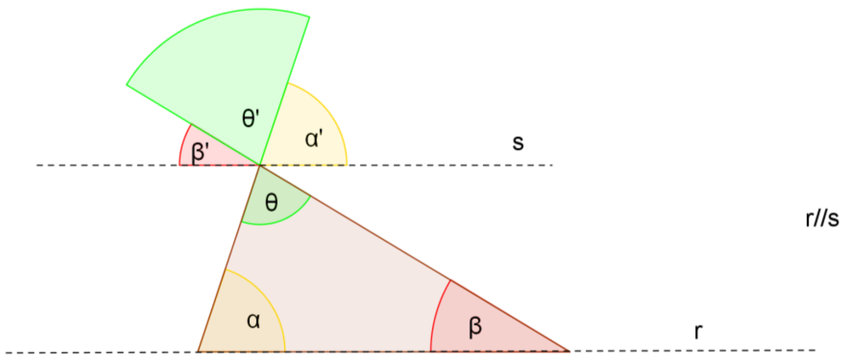
Relativamente às figuras observadas, indica a razão de semelhança, a razão entre os perímetros e a razão entre as áreas das figuras.

3. Qual é a relação entre a razão das áreas e dos perímetros de duas figuras semelhantes e a razão de semelhança?

3.5. Soma dos ângulos

3.5.1. Soma dos ângulos internos de um triângulo

Esta prova sem palavras pretende mostrar ao aluno que as amplitudes dos ângulos assinalados acima da linha s são as mesmas dos ângulos internos do triângulo. O aluno deve ser capaz de reconhecer que a amplitude α coincide com α’ e a amplitude β é igual a β’, uma vez que são as amplitudes de ângulos agudos de lados dois a dois paralelos, e que θ é igual a θ’, porque são as amplitudes de ângulos verticalmente opostos. Pode assim concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°.



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

Ilustração 29: Prova pictórica da soma dos ângulos internos de um triângulo

Ano: 5º ano

Domínio: Geometria, triângulos e quadriláteros.

Pré-requisitos: definição de ângulo interno e externo de um triângulo, ângulos de lados paralelos, ângulos verticalmente opostos e ângulos suplementares.

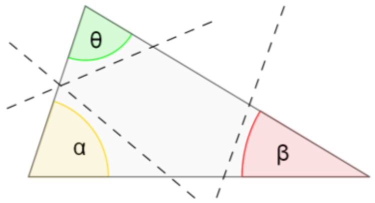
Aprendizagens visadas:

- Encontrar a soma dos ângulos internos de um triângulo.

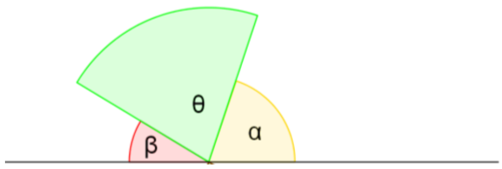
Atividade 20: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Vamos descobrir a soma dos ângulos internos de um triângulo!

1. Constrói um triângulo no teu caderno.
2. Pinta os ângulos internos do triângulo com três cores diferentes.



3. Recorta os ângulos do triângulo e cola-os no teu caderno unidos pelo vértices do triângulo.

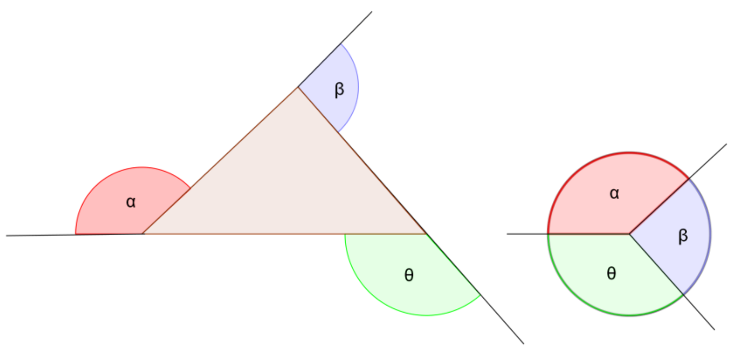


4. A soma dos ângulos internos de um triângulo é

$$\alpha + \beta + \theta = \_\_\_\_°.$$

3.5.2. Soma dos ângulos externos de um triângulo

Nesta prova pictórica, os alunos podem observar os três ângulos externos do triângulo de vértices distintos e concluir que a sua soma é um ângulo giro.



$$\alpha + \beta + \theta = 360°$$

Ilustração 30: Prova pictórica da soma dos ângulos externos de um triângulo

Ano: 5º ano

Domínio: Geometria, triângulos e quadriláteros.

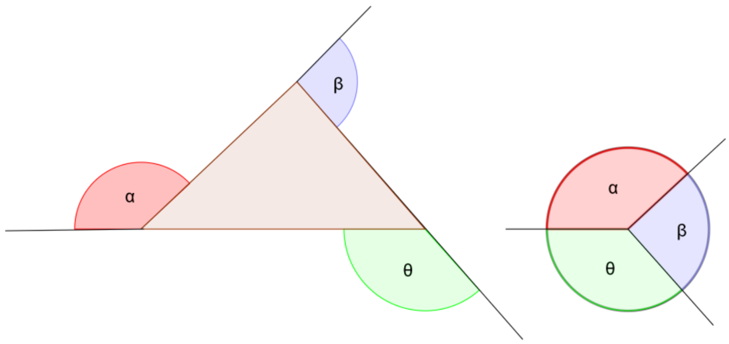
Pré-requisitos: definição de ângulo interno e externo de um triângulo.

Aprendizagens visadas:

- encontrar a soma dos ângulos externos de um triângulo.

Atividade 21: Soma dos ângulos externos de um triângulo

Observa as figuras.



1. Constrói um triângulo no teu caderno.

2. Desenha três ângulos externos do triângulo com vértices diferentes.

3. Pinta-os de cores diferentes.

4. Recorta esses três ângulos.

5. Cola no teu caderno os três ângulos unidos pelo vértice.

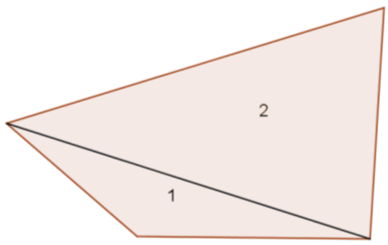
6. Completa: A soma dos ângulos externos do triângulo é

$$\alpha + \beta + \theta = \_\_\_\_^{\circ}.$$

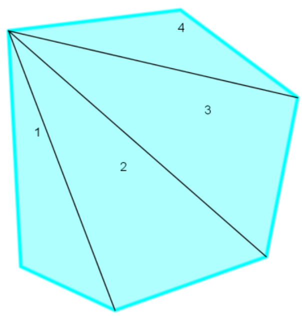
3.5.3. Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

A prova pictórica seguinte particulariza a soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os casos do quadrilátero, hexágono e eneágono, para que o aluno relacione o número de lados do polígono com o número de triângulos em que foi decomposto e compreenda a sua fórmula generalizada (Cavalcante, 2012).

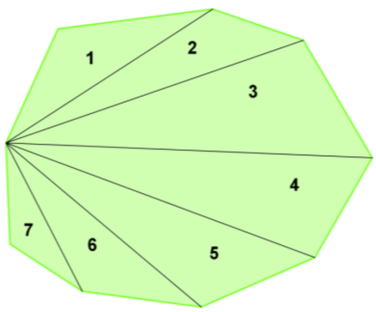
Soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados



$$\mathrm{S_i} = 2 \times 180^\circ \ \ (n = 4)$$



$$\mathrm{S_i} = 4 \times 180^\circ \ \ (n = 6)$$



$$\mathrm{S_i} = 7 \times 180^\circ \ \ (n = 9)$$

$$\mathrm{S_i} = (n - 2) \times 180^\circ$$

Ilustração 31: Prova pictórica da soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Ano: 9º ano

Domínio: Geometria, propriedade dos ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.

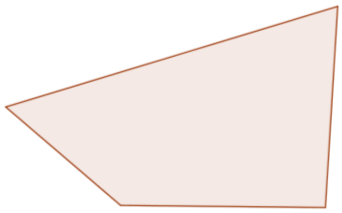
Pré-requisitos: definição de ângulo interno, soma dos ângulos internos de um triângulo.

Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo com *n* lados.

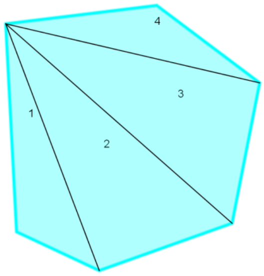
Atividade 22: Soma dos ângulos internos de um polígono convexo
Vamos descobrir uma fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo!

1. Observa o quadrilátero (n = 4). Decompõe-o em dois triângulos e completa o espaço em branco:



$$S_{\text{internos (quadrilátero)}} = 2 \times \_\_\_\_°.$$

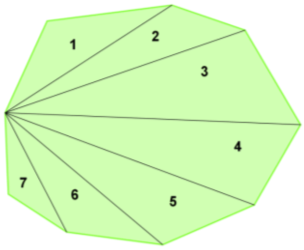
2. Observa o hexágono (n = 6) e completa os espaços em branco:



$$S_{\text{internos (hexágono)}} = \_\_ \times \_\_\_\_°.$$

3. Observa o eneágono (n = 9) e completa os espaços em branco:

$$S_{\text{internos (eneágono)}} = \_\_ \times \_\_\_\_\_°.$$



4. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é

$$S_i = (n-2) \times \_\_\_\_°.$$

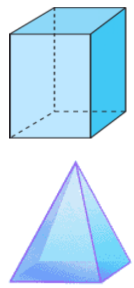
3.6. Volumes

3.6.1. Volume de uma pirâmide reta

O aluno deve comparar o volume de uma pirâmide com o volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura e verificar que o volume da pirâmide é uma terça parte do volume do prisma.

$$V_{\text{prisma}} = A_B \times h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_B \times h$$



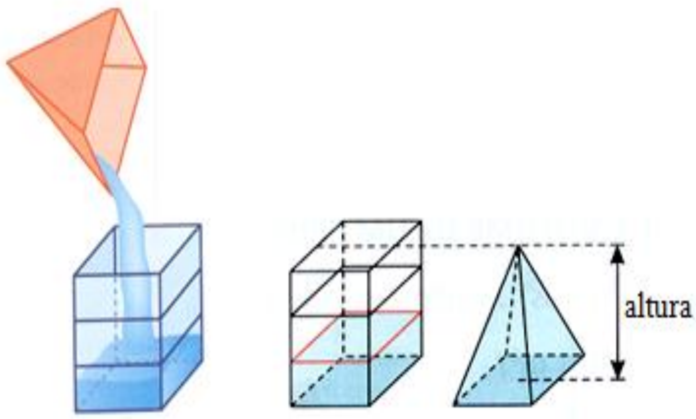


Ilustração 32: Prova pictórica do volume de uma pirâmide reta
(imagem retirada de http://matematicaanjos.blogspot.pt/p/solidos-geometricos.html)

Ano: 9º ano

Domínio: Geometria, medida, volumes e áreas de superficies de sólidos.

Pré-requisitos: definição de área de polígonos, altura e base de um sólido, volume de um prisma.

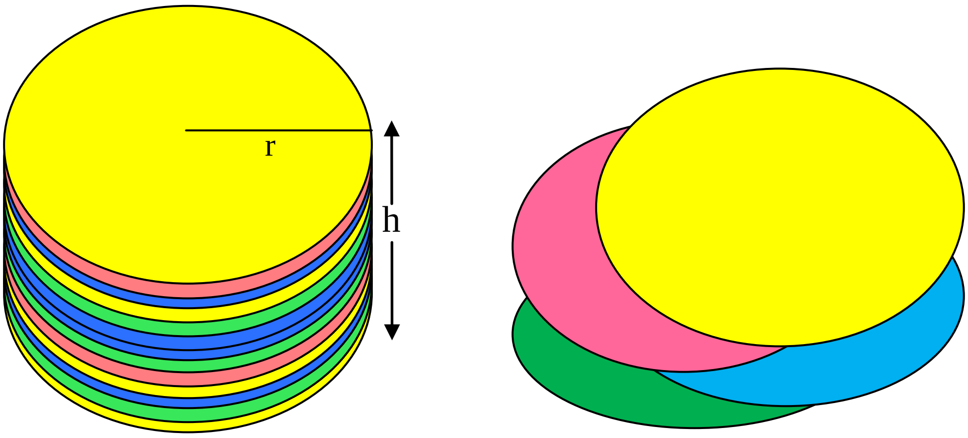
Aprendizagens visadas:

- relacionar dois sólidos com a mesma base e com a mesma altura, sendo um deles um prisma e o outro uma pirâmide;
- deduzir a fórmula do volume de uma pirâmide através do volume de um prisma.

Outra sugestão é fazer a experiência com os alunos com sólidos transparentes de enchimento, utilizando um prisma e uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura. Enche-se a pirâmide e verte-se o seu enchimento para o prisma, repetindo a mesma operação até conseguir encher o prisma. Deixar que os alunos experienciem e concluam a fórmula do volume de uma pirâmide.

3.6.2. Volume de um cilindro reto

Pretende-se com estas imagens que os alunos relacionem o volume do cilindro com a multiplicação da área do círculo pela altura respetiva (Sequeira, et al., 2011).



$$V_{\text{cilindro}} = \pi \times \mathrm{r}^2 \times \mathrm{h}$$

ou

$$V_{\text{cilindro}} = A_B \times \mathrm{h}$$

Ilustração 33: Prova pictórica do volume de um cilindro reto

Ano: 6º ano

Domínio: Geometria, medida, volumes.

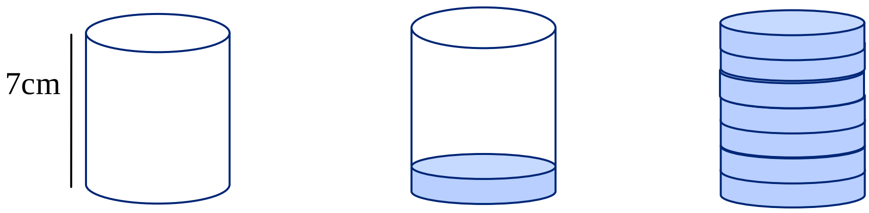
Pré-requisitos: definição de área de um círculo, raio de uma circunferência.

Aprendizagens visadas:

- relacionar as figuras com a igualdade;
- deduzir a fórmula do volume de um cilindro.

Atividade 23: Volume de um cilindro reto
Vamos descobrir uma fórmula para o volume de um cilindro reto!

Observa as figuras.



1. Determina a área da base do cilindro, sabendo que o raio da base mede 2 cm.

2. De quantos discos necessitas para preencheres o cilindro considerando que cada disco tem 1 cm de altura?

3. Sabendo que o volume de um disco com altura 1 cm é 4πcm^3, qual o volume do cilindro?

4. Completa:

$$V_{\text{cilindro}} = A_B \times \_\_\_.$$

Conclusão

“O que ouço, esqueço. O que vejo, recordo. O que faço, aprendo. “
(Confúcio)

Diversas pesquisas em Educação Matemática realçam a importância do desenvolvimento de processos de visualização no Ensino da Matemática. É inegável o papel das provas pictóricas no ensino da matemática como ferramenta pedagógica na compreensão de conceitos matemáticos.

Na realização deste trabalho, o propósito foi pesquisar e reunir vários exemplos de provas pictóricas de identidades algébricas que possam ser aplicadas em contexto de sala de aula, ao longo do segundo e terceiro ciclos do ensino básico, sempre que o professor entenda oportuno, de forma a tornar a disciplina mais intuitiva, estimulante, conduzindo os alunos na construção dos seus próprios conceitos matemáticos, instigando-os à descoberta do novo saber.

Para que o sucesso dos alunos seja alcançado, o professor tem muitas vezes necessidade de ultrapassar formalismos criados e tornar as aulas menos expositivas. Essa tarefa ficou facilitada com o apetrechamento tecnológico das escolas e o melhoramento do software gráfico.

Na realização destas propostas, o aluno pode vivenciar experiências matemáticas de forma intuitiva, estabelecendo conexões entre as imagens e identidades algébricas, relacionando assim conceitos geométricos e algébricos que permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática.

Algumas destas propostas foram aplicadas em contexto de sala de aula em três turmas que leciono, uma turma do sexto ano e duas turmas do quinto ano de escolaridade de uma escola pública do distrito de Aveiro. As turmas revelam grandes disparidades de aprendizagem. Alguns alunos são bastante interessados, participativos e com grande capacidade criativa e imaginativa. No entanto, nessas mesmas turmas, há alunos que não participam nas atividades propostas e, quando lhes é solicitado a sua participação, demonstram grandes dificuldades, mesmo em raciocínios simples.

Algumas provas apresentadas nesta dissertação sofreram modificações relativamente às sugeridas aos alunos por entender que não despertaram a compreensão desejada ou por serem demasiado abstratas.

Apresenta-se uma síntese geral destas experiências de aplicação das provas pictóricas nas turmas e não uma transcrição das mesmas.

As atividades primeiramente experienciadas no quinto ano foram as relativas à distributividade da multiplicação em relação à adição (2.1.) e à soma dos ângulos internos e externos de um triângulo (3.5.1. e 3.5.2.). A título extraordinário, foi realizada a atividade da soma dos ângulos de um polígono convexo com *n* lados (3.5.3.) resultante de uma curiosidade colocada pelos alunos. Nestas turmas, apresentaram-se ainda as provas pictóricas da área de um paralelogramo (3.3.1) e da área de um triângulo (3.3.2.).

No sexto ano foram implementadas duas propostas sobre sequências: a soma dos *n* primeiros números naturais (2.4.1.) e soma dos *n* primeiros números ímpares (2.4.2.).

A Atividade 1 sugerida para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (2.1.) sofreu alterações face às dificuldades que os alunos sentiram em indicar as áreas ao lidar com letras, tendo as expressões das áreas dos retângulos coloridos sido incluídas na figura e a tarefa inicial passou a ser a análise de um caso particular. Alguns estudantes só validaram a igualdade para casos particulares em que atribuíram medidas aos lados dos retângulos.

Quanto à soma dos ângulos internos de um triângulo (3.5.1.), os alunos já tinham conhecimento de algumas propriedades geométricas dos ângulos de lados paralelos, ângulos verticalmente opostos, assim como de ângulos suplementares, propriedades estas que foram fundamentais para a interpretação da prova apresentada. Parte dos alunos foi capaz de comunicar o seu raciocício e concluir acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo. De qualquer forma, a Atividade 20, de recorte dos ângulos internos do triângulo e colagem de modo a formarem um ângulo de 180º, permitiu-lhes sedimentar a aprendizagem.

Na prova pictórica da soma dos ângulos externos de um triângulo (3.5.2.), os alunos compreenderam a prova com alguma facilidade. A realização da Atividade 21 foi importante para que os alunos desenhassem os ângulos externos de um triângulo e registassem a conclusão no caderno diário. Todos os alunos, mesmos aqueles que revelam mais dificuldades na disciplina, mostraram motivação na descoberta da igualdade. Ao longo das aulas seguintes, verifiquei que os alunos interiorizaram as aprendizagens, uma vez que, na realização das tarefas propostas que envolviam ângulos de um triângulo, os alunos aplicaram os conhecimentos corretamente.

A propósito da pergunta de um aluno sobre se a soma dos ângulos internos de um quadrilátero seria também 180°, sugeri a prova pictórica da soma dos ângulos de um polígono convexo com *n* lados (3.5.3.). Os alunos não compreenderam a fórmula generalizada, mas foram capazes de a concretizar para o quadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono e octógono. Mostraram um grande interesse pela descoberta.

As provas pictóricas relativas à área de um paralelogramo (3.3.1) e à área de um triângulo (3.3.2.) foram apresentadas no mesmo dia, perto do final do ano letivo. Primeiramente, analisaram a prova da área do paralelogramo. Assim, os alunos observaram o paralelogramo, a sua decomposição em figuras e o rearranjo das figuras respetivas num retângulo com a mesma base e a mesma altura. Um elevado número de alunos estabeleceu rapidamente a relação com a identidade algébrica e foi capaz de comunicar o seu raciocínio com alguma clareza. Quanto à área do triângulo retângulo, os alunos tiveram algumas dúvidas na interpretação da figura por lhes parecer tratar-se de um triângulo isósceles. Por esse motivo, o triângulo foi alterado para não suscitar dúvidas. Após esclarecimentos quanto ao facto de não se tratar necessariamente de um triângulo isósceles, os alunos concluíram a respetiva identidade algébrica. No triângulo acutângulo, uma aluna comunicou o seu raciocínio, apenas comparando a área do triângulo com a área do retângulo representado. Outros alunos estabeleceram a relação entre a área do triângulo acutângulo com a do paralelogramo com a mesma base e a mesma altura. Na área do triângulo obtusângulo, os alunos não hesitaram em comunicar a respetiva identidade algébrica.

Quanto à experiência no sexto ano, os alunos mostraram interesse pela prova da soma dos *n* primeiros números naturais (2.4.1.), mas foram mais resistentes em ultrapassar algumas dificuldades. Um elevado número de alunos desistiu após pouco tempo. Seguidamente, passei à Atividade 6. Embora uma grande parte da turma fosse respondendo às questões, revelavam pouca autonomia dado que é um apelo mais claro à abstração e à generalização.
Dada esta dificuldade partilhada e com vista a uma maior participação da turma na atividade, foi introduzida a soma dos *n* primeiros números ímpares naturais (2.4.2.) com a apresentação no quadro da sequência pictórica dos quadrados de números naturais. Uma parte dos alunos reconheceu a lei de formação após ter observado a Prova II. Os alunos que não acompanharam o raciocínio anterior, puderam com a Atividade 7 realizar a análise das imagens de forma orientada. Neste âmbito das sequências, uma parte dos alunos manifestou dificuldade em lidar com linguagem natural e simbólica. Ainda assim, os alunos conseguiram formular conjeturas que permitiram a discussão e aperfeiçoamento da comunicação matemática no sentido de obter a fórmula generalizada. No entanto, alguns alunos apenas validaram conjeturas particulares, não sendo capazes de as generalizar.
Estas experiências fortaleceram a minha convicção de que estas formas de aprendizagem são momentos de dedução de propriedades geométricas e construção de conceitos matemáticos. Os alunos adquiriram não só os conhecimentos algébricos, como relacionaram os conceitos algébricos com a geometria de uma forma intuitiva, sendo o resultado da aprendizagem muito positivo. O encorajamento à intervenção e explicitação de raciocínios foi importante para o desenvolvimento da compreensão das identidades algébricas.
Segundo Poincaré (Poincaré, 1988), sem o uso da intuição não há entendimento nem gosto pela matemática, é por isso importante que o uso de provas pictóricas ocorra de uma forma continuada uma vez que estas contribuem, concomitantemente, para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar visualmente.

Ressalvam-se, contudo, alguns cuidados a ter na observação de diagramas e a necessidade de explicar aos alunos que uma prova matemática não pode ser dada exclusivamente através da interpretação de uma imagem.
Apresentam-se dois exemplos em que a intuição e a interpretação errónea de uma imagem podem conduzir a uma falsa conjetura.

Um exemplo é o caso da divisão de um círculo em regiões. Marcados alguns pontos na circunferência que são unidos por todos os segmentos possíveis entre eles, desde que não se verifiquem três segmentos concorrentes, conte-se o número de regiões em que fica dividido o círculo (Jobbings, 2008).

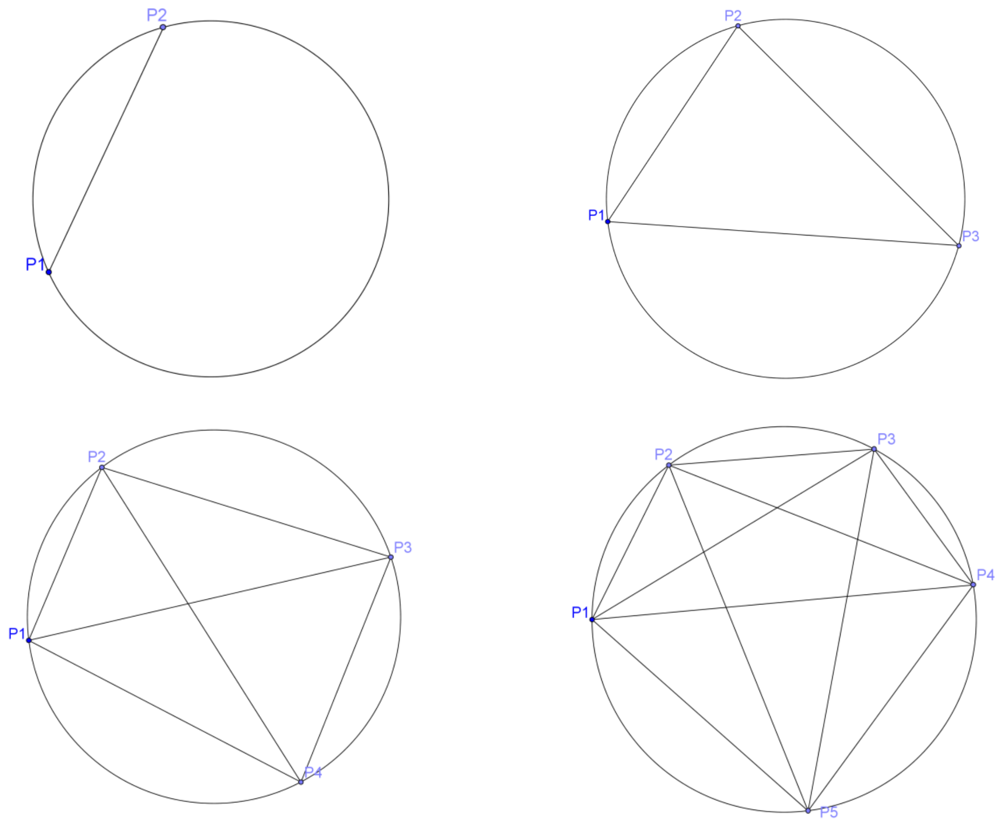


Ilustração 34: Divisão de um círculo em regiões com 2 a 5 pontos sobre a circunferência

Pontos	Regiões
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Quando restringida a análise aos casos $n = 1, \ldots, 5$, somos conduzidos à sequência de termo geral 2^{n-1}, em que n representa o número de pontos marcados sobre a circunferência. Na verdade, com 6 pontos, o círculo fica dividido em 31 regiões em vez de $2^5 = 32$ regiões. A fórmula correta do número de regiões em função dos *n* pontos marcados na circunferência é dada pela soma entre o número de segmentos, o número de interseções entre segmentos e uma unidade, ou seja,

$$R_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n}{24} + 1$$

em que R_n representa o número de regiões e *n* corresponde ao número de pontos da circunferência.

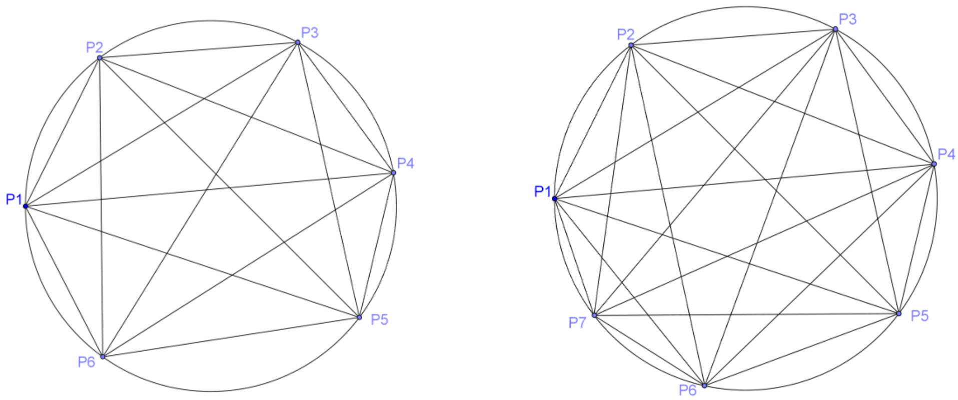


Ilustração 35: Divisão de um círculo em regiões com 6 e 7 pontos sobre a circunferência

Quadro comparativo das fórmulas

n	R_n	2^{n-1}
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
5	16	16
6	31	32
7	57	64

Outro exemplo é o paradoxo do quadrado perdido, também chamado Paradoxo de Curry. É um enigma resultado de uma ilusão de ótica, em que são vistos dois ‘triângulos’, formados pelas mesmas peças, onde porém um ‘triângulo’ aparenta ter um pequeno quadrado a menos que o outro. De acordo com Martin Gardner (1914–2010), escritor de matemática recreativa, autor da coluna "*Mathematical Games*" da revista *Scientific American* de 1956 a 1981, esse enigma foi elaborado em 1953 pelo mágico amador Paul Curry.

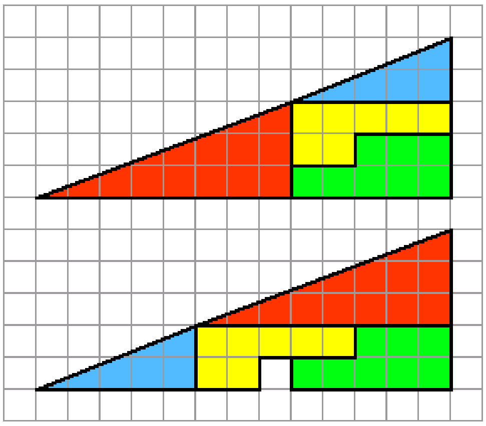


Ilustração 36: Paradoxo do quadrado perdido

Após a observação destas duas figuras (Kun, 2011), a intuição conduz a diversas áreas. A área da primeira figura parece ser 32,5 u.a. e da segunda figura 31,5 u.a., por possuir menos uma quadrícula. Outra interpretação conduz a uma área igual a 32 u.a. atendendo a que as figuras constituídas pelas mesmas peças são equivalentes.

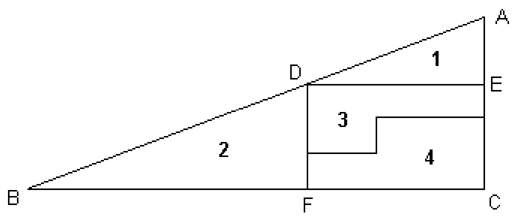


Ilustração 37: Decomposição da primeira figura do paradoxo do quadrado perdido em peças

Podemos observar que as peças que constituem o primeiro 'triângulo' detalhado na ilustração 37 são as seguintes:

peça **1 -** um triângulo retângulo de catetos 5 e 2;

peça **2 -** um triângulo retângulo de catetos 8 e 3;

peça **3 -** um hexágono de área 7;

peça **4 -** um hexágono de área 8.

O erro decorre de assumir-se que as figuras são triângulos cujo lado AB tem a mesma inclinação. Contudo o triângulo azul e o triângulo vermelho têm inclinações diferentes, $2/5$ e $3/8$, respetivamente, o que explica a aparente contradição.

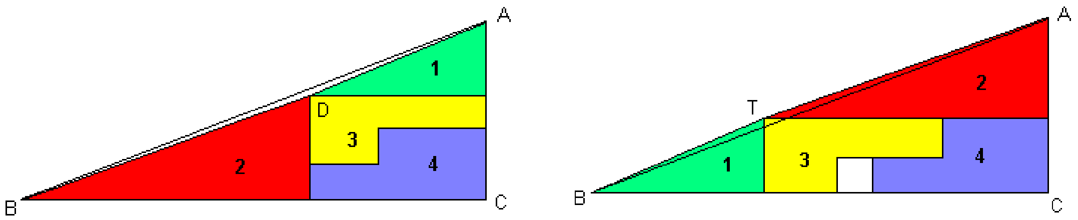


Ilustração 38: Construção do segmento AB sobre as duas figuras do paradoxo do quadrado perdido

Perante a vastidão e riqueza do tema das provas sem palavras, a opção que ditou o fio condutor desta dissertação foi selecionar aquelas que seriam mais adequadas ao público escolar que leciono. Outro desafio interessante seria a exploração deste tema no âmbito do ensino secundário, o que ficará em aberto para outro momento.

O ensino da matemática está em desenvolvimento permanente. É importante refletir sobre as diversas formas de despertar o interesse dos estudantes, contribuindo para o seu sucesso na disciplina.

Bibliografia

Alsina, Claudi e Nelsen, Roger. 2006. *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics.* Washington : Mathematical Association of America, 2006. ISBN: 978-0883857465.

—. 2009. *When Less is More: Visualizing Basic Inequalities.* 1ª ed. Washington, EUA : Mathematical Association of America, 2009. ISBN: 978-0883853429.

—. 2010a. An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics.* 2010, Vol. 3, pp. 118-127.

—. 2010b. *Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics.* EUA : Mathematical Association of America, 2010. ISBN: 978-0-88385-348-1.

Benson, Steve, et al. 2005. *Ways to Think About Mathematics: Activities and Investigations for Grade 6-12 Teachers.* 1ª ed. Thousands Oaks, California : Corwin Press, 2005. ISBN: 978-0761931058.

Bishop, Alan J. 1989. Focus on learning problems in mathematics. *Review of Research on Visualization in Mathematics Education.* 1989, Vol. 11, pp. 7-16.

Breda, Ana, et al. 2011. *Geometria e Medida no Ensino Básico.* Lisboa : Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2011.

Casos notáveis. 1999. Casos notáveis. *ICM - Página dos alunos.* [Online] Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999. [Citação: 12 de janeiro de 2014.] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm22/frame5.htm.

Cavalcante, Romirys. 2012. Soma dos ângulos internos de um polígono convexo. *Vivendo entre Símbolos.* [Online] agosto de 2012. [Citação: 12 de janeiro de 2014.] http://www.vivendoentresimbolos.com/2012/08/soma-dos-angulos-internos-de-um.html.

Crato, Nuno. 2007. *Passeio Aleatório.* Lisboa : Gradiva, 2007. ISBN: 978-989-616-216-0.

Dreyfus, T. 1991. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. [ed.] F. Furinghetti. *Proceedings Fifteenth Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education.* Assis, Itália, 1991, Vol. I, pp. 33-48.

Faria, Luísa, Almeida, Pedro Rocha e Antão, Catarina. 2011. *Matemática Dinâmica - 8º ano.* Porto : Porto Editora, 2011. ISBN: 978-972-0-32224-1.

Gerstein, Larry J. 1996. *Introduction to Mathematical Structures and Proofs.* St. Barbara : Springer Publishing, 1996. ISBN: 978-1461442646.

Gobbi, Juliana Aparecida. 2012. *Do livro didático ao software Geogebra: A engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental.* Santa Maria, RS : UNIFRA, 2012.

Goldenberg, E. Paul, Cuoco, Albert e Mark, June. 1998. A role for geometry in general education. [autor do livro] Daniel Chazan e Richard Lehrer. *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Mahwah: New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, ISBN: 978-0805819496, 1998, pp. 3-44.

Goodfriend, Jason. 2005. *Gateway to Higher Mathematics.* Massachusetts : Jones and Bartlett Learning, 2005. ISBN: 0-7637-2733-4.

Gossett, Eric. 2009. *Discrete Mathematics With Proof.* New Jersey : Wiley, 2009. ISBN: 978-0470457931.

Grossfield, Andrew. 2008. Wonder, discovery and intuition in elementary mathematics. *American Society for Engineering Education.* [Online] 3 de maio de 2008. [Citação: 3 de janeiro de 2014.] https://www.asee.org/documents/sections/middle-atlantic/spring-2008/02-Wonder-Discovery-and-Intuition-in-Elementary-Mathematics.pdf.

Guzman, Miguel de. 1997. *El Ricón de La Pizarra.* Madrid : Pirâmide, 1997. ISBN: 978-8436809909.

Hadamard, J. 1945. *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field.* United Kingdom : Priceton University Press, 1945. ISBN: 978-1447493273.

Hersh, Reuben. 1993. *Proving is Convincing and Explaining.* Holanda : Kluwer Academic Publisher, 1993. pp. 389-399. Vol. 24. ISSN 0013-1954.

História do Teorema de Pitágoras. 1999. História do Teorema de Pitágoras. *ICM - Página dos alunos.* [Online] Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999. [Citação: 17 de março de 2014.] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm25/pitagoras/geralhpitagoras.htm.

Issacs, Rufus. 1975. Two mathematical papers without words. *Mathematics Magazine.* setembro de 1975, Vol. 48, p. 198.

Jobbings, Andrew. 2008. Chords and regions. *Arbelos — solutions for mathematics enrichment.* [Online] 27 de dezembro de 2008. [Citação: 20 de dezembro de 2013.] http://www.arbelos.co.uk/Papers/Chords-regions.pdf.

Keef, Patrick, Guichard, David e Gordon, Russ. 2010. *An Introduction to Higher Mathematics.* EUA : Whitman College, 2010.

Kilhian, Kleber. 2011. O Teorema de Pitágoras segundo Euclides – A Proposição I - 47. *O Baricentro da Mente.* [Online] 13 de abril de 2011. [Citação: 19 de novembro de 2013.] http://obaricentrodamente.blogspot.pt/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html.

Krantz, Steven G. 2011. *The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof.* New York : Springer, 2011. ISBN:978-0387489087.

Kun, Jeremy. 2011. False proof - 31,5 = 32,5. *Programação ∩ Math.* [Online] 2011. [Citação: 3 de março de 2014.] http://jeremykun.com/tag/proofs-without-words/.

Lamas, Rita de Cássia Pavani. 2011. A área do círculo: atividades experimentais. *Núcleos de Ensino da UNESP - Artigos 2008.* São Paulo : Cultura Académica, 2011, Vol. 7, pp. 727-733.

Leivas, José Carlos Pinto. 2009. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática.* Curitiba : Universidade Federal de Paraná, 2009. pp. 136-137.

Lieury, Alain. 1997. *Memória e Sucesso Escolar.* Lisboa : Editorial Presença, 1997. p. 49. ISBN: 978-9722322119.

Lucas, John F. 1990. *Introduction to Abstract Mathematics.* 2ª ed. EUA : Ardley House Publishers, 1990. ISBN: 978-0912675732.

Malagutti, Pedro e Meneguetti, Renata. 2013. Comprovação do Teorema de Pitágoras. *Experimentoteca USP - ambiente educacional web.* [Online] 7 de dezembro de 2013. http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/2251.

Miller, Robin L. 2012. *On Proofs Without Words.* Walla Walla : Whitman College, 2012. pp. 2-3.

Ministério da Ciência. 2013. *Programa e Metas Curriculares Matemática, Ensino Básico.* Lisboa : Direcção Geral de Educação, 17 de junho de 2013.

Ministério da Educação. 2007. *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa : Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2007.

Morash, Ronald P. 1991. *Bridge to Abstract Mathematics: Mathematical Proof and Structures.* EUA : McGraw- Hill Higher Education, 1991. ISBN: 978-0070430433.

Munari, Bruno. 1968. *Design e Comunicação Visual.* Lisboa : Edições 70, 1968. pp. 19-20. ISBN: 972-44-0671-7.

Nelsen, Roger. 1993. *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking.* EUA : Mathematical Association of America, 1993. ISBN: 978-0883857007.

—. 2000. *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking.* EUA : Mathematical Association of America, 2000. ISBN: 978-0883857212.

Neves, Maria Augusta Ferreira, Silva, António Pinto e Silva, Jorge Nuno. 2011. *Matemática 8.* Porto : Porto Editora, 2011. ISBN: 978-972-0-32255-5.

Nojima, Vera Lúcia Moreira dos Santos. 1999. Comunicação e leitura não verbal. [autor do livro] Rita Maria de Souza Couto e Alfredo Jefferson Oliveira. *Formas do Design - por uma metodologia interdisciplinar.* Rio de Janeiro : 2AB, 1999, Vol. 1, p. 15.

Poincaré, Henri. 1988. Intuição e lógica em matemática. [trad.] H. M. Guimarães. *A Natureza da Matemática.* Lisboa: APM : Cadernos de Educação e Matemática, nº 1, 1988, pp. 7-16.

Pontes, João P., Branco, Neuza e Matos, Ana. 2009. *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa : Direcção Geral de Educação, 2009.

Presmeg, Norma. 2006. Research on visualization in learning and teaching mathematics. [autor do livro] Angel Gutiérrez e Paolo Boero. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Rotterdam : Sense Publishers, 2006, pp. 205-235.

Sales, Elielson R. 2013. A visualização no ensino de matemática: uma experiência com estudantes surdos. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* [Online] 2013. [Citação: 15 de janeiro de 2014.] http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/80_28_ID.pdf.

Santos, Marconi C. 2011. *Teorema de Pitágoras: Suas Diversas Demonstrações.* Universidade Estatual de Paraíba : Centro de Ciências e Tecnologia, 2011.

Sequeira, Ana, et al. 2011. *Olá Matemática! Matemática 6º ano, Parte 1.* Lisboa : Porto Editora, 2011. ISBN: 978972032242-5.

Sérgio, Paulo. 2014. Os números figurados (parte 1). *Fatos Matemáticos.* [Online] 10 de março de 2014. http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2012/06/os-numeros-figurados-parte-1.html.

Silva, Marcos Noé Pedro da. 2013. Áres de figuras planas. *Mundo da Educação.* [Online] 5 de novembro de 2013. http://www.mundoeducacao.com/matematica/area-triangulo.htm.

Štrausová, Irena e Hašek, Roman. 2013. Dynamic visual proofs: using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology.* junho de 2013, Vol. 7, 2, p. 131.

Strogatz, Steven. 2010. Take It to the Limit. *Opiniator - Exclusive Online Commentary From The Times.* [Online] 4 de abril de 2010. [Citação: 4 de março de 2014.] http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/04/04/take-it-to-the-limit/.

Swetz, Frank e Katz, Victor. 2011. Mathematical treasures - Zhou Bi Suan Jing. *Loci, Mathematical Association of America.* janeiro de 2011.

Tomaz, Márcia. 2013. Área do losango. *InfoEscola.* [Online] 7 de novembro de 2013. [Citação: 5 de janeiro de 2014.] http://www.infoescola.com/matematica/area-do-losango/.

Wolf, Robert S. 1998. *Proof, Logic, and Conjecture: The Mathematician's Toolbox.* New York : W.H. Freeman and Company, 1998. ISBN: 978-0716730507.